



CUADERNILLO DE APUNTES DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

Lic. Telésforo Zamorano Soriano

Agosto de 2019.

ÍNDICE

1.	SISTEMAS NUMÉRICOS	5
1.1	Sistemas numéricos (binario, octal, decimal, hexadecimal).....	11
1.2	Conversiones entre Sistemas	13
1.2.1	Decimal a Binario Octal y Hexadecimal	13
1.2.2	Binario Octal Hexadecimal	15
1.3	Operaciones básicas.....	18
1.4	Algoritmo de Booth.....	26
1.5	Algoritmos de División	30
1.6	Complemento: Aritmética Modular	32
2.	CONJUNTOS.....	35
2.1	Características de los conjuntos.....	35
2.1.1	Conjunto universo, vacío	36
2.1.2	Números naturales, enteros, racionales, reales e imaginarios	37
2.1.3	Subconjuntos	44
2.1.4	Conjunto potencia.....	44
2.2	Operaciones con conjuntos (Unión, Intersección, Complemento, Diferencia y diferencia simétrica)	45
2.3	Propiedades de los conjuntos.....	50
2.4	Aplicaciones de conjuntos	51
3.	LÓGICA MATEMÁTICA.....	55
3.1	Lógica proposicional.	55
3.1.1	Concepto de proposición	56

3.1.2 Proposiciones compuestas (Disyunción, Conjunción, Negación, Condicional, Bicondicional)	58
3.1.3 Tablas de verdad	64
3.1.4 Tautologías, contradicción y contingencia	69
3.1.5 Equivalencias Lógicas	70
3.1.6 Reglas de inferencia	72
3.1.7 Argumentos válidos y no válidos	76
3.1.8 Demostración formal (Directa, Por contradicción)	79
3.2 Lógica de predicados.	83
3.2.1 Cuantificadores	84
3.2.2 Representación y evaluación de Predicados	87
3.3 Algebra declarativa.....	88
3.4 Inducción matemática.....	91
4. ALGEBRA BOOLEANA	100
4.1 Teoremas y postulados.	100
4.2 Aplicación del algebra booleana (Compuertas lógicas)	111
4.2.1 Propiedades de los Circuitos Combinatorios.....	115
4.2.2 Funciones lógicas	117
4.3 Aplicación del algebra booleana.	118
5. RELACIONES	121
5.1 Conceptos básicos.	121
5.2 Propiedades de las Relaciones	122
5.3 Relaciones de equivalencia.....	126
5.4 Aplicaciones	129
6. TEORÍA DE GRAFOS	132

6.1 Elementos y características de los grafos	132
6.2 Representación de los Grafos	135
6.3 Algoritmos	140
6.4 Árboles	142
FUENTES DE INFORMACIÓN	153

1. SISTEMAS NUMÉRICOS

Competencias específicas de la unidad: Sistematizar la conversión entre sistemas numéricos posicionales, así como las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Los sistemas numéricos son muy importantes en computación, aquí veremos los sistemas en base 2, 8 y 16 que son las que más se utilizan en computación; por supuesto con la relación entre la base 10 que es la que utilizamos los seres humanos.

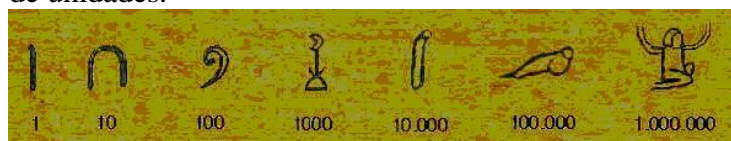
SISTEMAS DE NUMERACIÓN Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que se utilizan para representar los números.

Dependiendo del sistema en particular el manejo y las operaciones pueden resultar muy simples o muy complicadas, por tal razón en computación se manejan sistemas posicionales de bases que sean potencias de 2, ya que los algoritmos para las operaciones son los más simples.

Sistemas Aditivos. Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas... como sean necesarios hasta completar el número. Una de sus características es por tanto que se pueden poner los símbolos en cualquier orden, sin embargo se pueden tener sistemas con reglas para los símbolos según el orden, que tienen mayor flexibilidad.

Han sido de este tipo las numeraciones egipcia, sumeria (de base 60), hitita, cretense, azteca (de base 20), romana y las alfabéticas de los griegos, armenios, judíos y árabes. ,

Sistema Egipcio: Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema de escribir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades.



Sistema Griego: El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades.



Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónicos.

Sistemas Híbridos: En estos sistemas se combina el principio aditivo con el multiplicativo

Sistema Chino: La forma clásica de escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 A.C. aproximadamente. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades y los distintas potencias de 10. Utiliza los ideogramas de la figura:

1	一	5	五	8	八	100	百
2	二	6	六	9	九	1 000	千
3	三	7	七	10	十	10 000	萬
4	四						

y usa la combinación de los números hasta el diez con la decena, centena, millar y decena de millar para según el principio multiplicativo representar 50, 700 ó 3000. El orden de escritura se hace fundamental, ya que 5 10 7 igual podría representar 57 que 75.

Sistema Babilónico: Entre la muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotámica se desarrollaron distintos sistemas de numeración. Antes del siglo X A.C. se inventó un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores.



Sistema Maya: Los mayas idearon un sistema de base 20 con el 5 cómo base auxiliar. La unidad se representaba por un punto. Dos, tres, y cuatro puntos servían para 2, 3 y 4. El 5 era una raya horizontal, a la que se añadían los puntos necesarios para representar 6, 7, 8 y 9. Para el 10 se usaban dos rayas, y de la misma forma se continúa hasta el 19. Este sistema era posicional de base 20 utilizando el zero como se utiliza actualmente, por lo resulta ser muy asombroso el adelanto para la representación de los números.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Los sistemas de numeración usados en la actualidad son posicionales. El valor de una cifra depende tanto de qué dígito es como de la posición que ocupa en el número.

Base. Es el número de símbolos distintos que se utiliza para representar un número en un sistema de numeración. Entonces decimos que el sistema de numeración es de esa base. Los símbolos de una determinada base van desde el 0 hasta la base -1 .

Coeficiente. El coeficiente determina el valor de cada símbolo dependiendo de la posición que ocupe con respecto al punto decimal. Por lo tanto a estos sistemas de numeración los llamaremos sistemas de numeración posicionales, porque el valor de cada cifra dependerá del valor absoluto del símbolo y de la posición relativa que ocupa con respecto al punto decimal.

Empezamos por representar números enteros en una base b . Los símbolos utilizados son $\{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$ si b es menor o igual a 10, en caso de ser mayor podemos utilizar las letras A, B, C, ... después del 9 o algún otro símbolo que se defina previamente. Como los sistemas que se utilizan por lo general no pasan de base 16, con las letras A, B, C, D, E y F es suficiente.

En un sistema de numeración de base n existen n símbolos. Al escribir un número en base n , el dígito d en la posición i , de derecha a izquierda, tiene un valor

En general, un número escrito en base n como $d_{m-1}d_{m-2}\dots d_2d_1$ tiene un valor

Los números nacen de la necesidad del hombre por contar y es bastante antigua la idea del conjunto de los enteros positivos. Dicho concepto se puede representar por:

$$\mathbf{N^+ = \{uno, dos, tres, \dots\}}$$

ó el conjunto de los números naturales que incluyen el cero, éste es:

$$\mathbf{N = \{cero, uno, dos, tres, \dots\}}$$

En general cada número representa una idea que es la cardinalidad ó cantidad de elementos en un conjunto dado así por ejemplo, el conjunto:

$$\{ \P, \textcircled{C}, \textcircled{R} \}$$

Tiene tres elementos, el número tres es la idea que abstrae la cantidad de elementos en el conjunto, esto es el conjunto:

$$\{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \}$$

también tiene tres elementos.

Aquí debemos distinguir al “numeral” o sea la representación sintáctica del número, que en el caso del ejemplo anterior se puede representar por:

Tres, three, 3, ..., III

La primera representación en español

La segunda representación en inglés

La tercera representación en indo-arábigo

La cuarta en numeración maya

La quinta en numeración romana

Todas son distintas representaciones del mismo número que es la idea.

Sintetizando:

Número: Idea que representa la cantidad de elementos de un conjunto. **Sentido Semántico.**

Numeral: Símbolo que se usa para representar un número. **Sentido Sintáctico.**

Así en el caso anterior se tienen varios numerales para un sólo número.

El numeral es a nivel sintáctico, esto es, símbolos utilizados para representar el número que es al nivel semántico: idea ó significado que representa dicho símbolo.

Por ahora utilizaremos el sistema indo-arábigo para representar los enteros, o sea

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Pero también se utilizará el español. Así, por ejemplo: 7 y siete representan la misma idea.

La fundamentación de los números enteros se puede hacer de acuerdo a Peano y tiene dos ventajas, primero se formaliza matemáticamente y segundo se consideran como entes sintácticos, que pueden ser manejados en computación.

Así definimos 0 como la **cardinalidad** del conjunto vacío, 1 como la cardinalidad de un conjunto que contenga un elemento. 2 como la cardinalidad de un conjunto que contenga dos elementos.

Obviamente los números naturales no son suficientes para realizar los problemas que se presentan y es necesario otro conjunto mayor. El de los números enteros, este conjunto aparece cuando se presenta el siguiente problema:

$$X + 5 = 3$$

Que aparece en casos como el siguiente: “Oye sobrino, cómo es que en la bodega hay 3 toneladas si envié 5, deberían de tener 5 más lo que había “, el problema es que se debían 2, contesta el sobrino.

De cualquier manera matemáticamente el problema planteado está dado por:

$$X+5 = 3$$

Cuya solución requiere de un tipo de número llamado: los enteros negativos. Así llegamos a los enteros

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Para la justificación formal de los enteros

Así la ecuación tiene solución: $X = -2$

Claramente estos números no son suficientes y problemas como el siguiente se salen del conjunto de los números enteros: “Se debe repartir el contenido de la bodega (3 toneladas) en las 4 tiendas de manera que en cada una se obtenga la misma cantidad.

La ecuación que representa el problema es

$$4x = 3$$

Esto nos lleva a los números racionales, lo que en matemáticas se conoce como el campo de cocientes de los enteros, estos son: $Q = \{a/b : a, b \in Z, b \neq 0\}$ Así $1/2, 5, 0, -4, -2/7, 11/9$ son elementos de Q .

La solución del problema anterior es

$$X = 3/4.$$

Finalmente los últimos números en esta sección son los números reales, algunos creen que los primeros números no racionales fueron descubiertos por los Pitagóricos, cuando trataban de medir la longitud de la hipotenusa en un triángulo.

Por ejemplo si quiero medir la longitud mayor en la escuadra $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ si los lados iguales miden 1, tenemos por el teorema de Pitágoras que:

$$x^2 = 1+1$$

$$x^2 = 2$$

No hay ningún número racional que satisfaga dicha ecuación; esto es, no se puede obtener 2 al elevar al cuadrado un cociente de dos números enteros, no importa qué números sean.

Esta aseveración parece muy atrevida, ya que si se quisiera verificar directamente con todas las parejas, sería imposible pues hay una cantidad infinita. Sin embargo hay formas indirectas para comprobarlo.

La solución de la ecuación anterior se representa por $\sqrt{2}$

Y de esta forma aparecen los números reales.

de tal forma que a cada número corresponde un punto y a cada punto un número.

Los números así definidos satisfacen los axiomas de los números reales .

En computación se utilizan diferentes tipos de números, a los enteros \mathbb{Z} corresponden los tipos `int` en C ó `integer` en Pascal así como `longint` que viene siendo una implementación práctica, que por limitante de la memoria que imponen este tipo de lenguajes los primeros corresponden a valores de $-32,768$ hasta $32,767$, los segundos corresponden a valores entre $-2'147,483,648$ hasta $2'147,483,647$. Esta limitante se debe a que tanto C como Pascal utilizan 2 bytes para el tipo entero y 4 bytes para el tipo `longint`. En lenguajes como Lisp Schem, los enteros no tienen límite, por lo que se tiene una mejor representación de los enteros ya que se puede manejar un número entero de cualquier tamaño.

A los números racionales \mathbb{Q} se les asocia los de tipo real en Pascal o `float` en C que simulan los números reales y que de nuevo debido a las limitantes de espacios no puede representarse un número real en general ni siquiera un número algebraico como $\sqrt{2}$. Habrá que recurrir a un lenguaje como Lisp para poder Representar números reales.

Es importante hacer notar que para la mayoría de las aplicaciones prácticas, con una aproximación de los números reales mediante un racional es suficiente, por lo que la comunidad dedicada a la computación acepta que los tipos real y float son reales. Si se quiere mayor precisión está el tipo `compund` y por supuesto se puede extender creando un nuevo tipo según la precisión que se quiera. También Pascal, utiliza un tipo de entero no-negativo que correspondería a lo que se llamó anteriormente \mathbb{N} .

Si se analizan los trabajos de Arquímedes ó cualquier otro matemático que no utilice el sistema decimal indo-arábigo se verá la dificultad para representar los números.

Simplemente, si se quiere sumar enteros utilizando numeración romana; los algoritmos resultarán bastante complicados, imaginemos tratar de sumar: $CDXXVII + CCXLII$

Esto nos conduce a que una buena representación de los números nos llevará por ende a una forma más sencilla de manejarlos.

Con el invento del sistema posicional, que utiliza la cultura indo-arábigo y la maya. El manejo de los números es más lógico y más sencillo.

1.1 Sistemas numéricos (binario, octal, decimal, hexadecimal).

El sistema decimal. El sistema de numeración decimal es un sistema posicional. La base del sistema de numeración decimal es 10 y está formado por los dígitos del 0 al 9. Un número en el sistema de numeración decimal lo podemos definir según el teorema fundamental de la numeración de la siguiente forma. Número $b = x_0b_0 + x_1b_1 + x_2b_2 + \dots + x_{n-1}b_{n-1}$ $x_i = \text{cifras } b$
 $= \text{datos } n = \text{número de cifras}$

El sistema binario. El sistema binario o sistema de numeración en base 2 es también un sistema de numeración posicional igual que el decimal, pero sólo utiliza dos símbolos, el “0” y el “1”. Por lo tanto para poder representar mayor número de información al tener menos símbolos tendremos que utilizar más cifras § Cuarteto: Número formado por 4 cifras en base 2 § Bit: Binary digit § Byte: 8 bits § Kilobyte: 1024 bytes § Megabyte: 1024 kilobytes § Gigabyte: 1025 megabytes
 Binario puro

El método de representación de enteros del binario puro consiste en pasar el número entero sin signo a binario, con la particularidad de respetar siempre el tamaño de la representación.

El paso de decimal a binario consiste en dividir por 2 sucesivamente hasta que el cociente sea menor que la base:

Con lo que queda $1110 = 10112$

Sistema Octal. Es un sistema de base 8, es decir, con tan solo ocho dígitos posibles, ‘0’ a ‘7’.

El paso de octal a decimal se realiza multiplicando cada dígito por su peso: $278 = 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2310$ El paso inverso consiste en dividir por la base (8):

Con lo que queda $678 = 10310$

Sistema Hexadecimal. Sin embargo el sistema de numeración más utilizado es el hexadecimal, el cual consta de 16 dígitos diferentes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F). El paso de hexadecimal a decimal es análogo a los anteriores: $123_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 291_{10}$ Al igual que el paso de decimal a hexadecimal:

Con lo que queda $291_{10} = 123_{16}$ Los 16 valores posibles de una variable hexadecimal son:

Dec.	Hex.	Oct.	Bin.
0	0	0	0000
1	1	1	0001
2	2	2	0010
3	3	3	0011
4	4	4	0100
5	5	5	0101
6	6	6	0110
7	7	7	0111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
10	A	12	1010
11	B	13	1011
12	C	14	1100
13	D	15	1101
14	E	16	1110
15	F	17	1111

Representación de números con base 10: Desde nuestro primer contacto con los números nos familiarizamos con el sistema base diez, utiliza diez símbolos llamados dígitos que son $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Los elementos se agrupan en decenas, diez decenas en una centena y diez centenas en una unidad de millar, etc., por lo que cada número se representa con una cadena o sucesión de dígitos, por ejemplo:

3469 representa

3 millares, 4 centenas, 6 decenas y 9 unidades

como diez se representa por 10

$$3469 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

En general cualquier número entero se puede representar con una base arbitraria utilizando N_0, N_1, \dots, N_{b-1} como los numerales primarios.

$$\text{Así: } (a_n a_{n-1} \dots a_0)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Esta representación será muy utilizada pero primero estudiaremos los temas en base diez.

También podemos representar un número racional, por ejemplo: 76.512 es

$$7 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

o sea 7 decenas, 6 unidades, 5 décimos, 1 centésimo y 2 milésimos.

1.2 Conversiones entre Sistemas

1.2.1 Decimal a Binario Octal y Hexadecimal

Para poder manejar los números en la computadora es necesario entender cómo se convierte de una base a otra.

Para convertir de base 10 a binario el algoritmo resulta muy sencillo, se divide entre 2 y se anota el cociente bajo el número y el residuo a la derecha, se aplica iterativamente este procedimiento hasta llegar a 0 y al final el resultado es la cadena de bits de abajo hacia arriba.

Ejemplo 1: Convertir a binario 49

49	1
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

Por lo tanto $49 = 110001_2$

Ejemplo 2. Convertir 123 a binario:

123	1
61	1

30	0
15	1
7	1
3	1
1	1
0	

Por lo tanto $123 = 1111011_2$

Convertir de decimal a octal

Ejemplo: Convertir 381 a base 8.

381	5
47	7
5	5
0	

Por lo tanto $381 = 575_8$

Similarmente para convertir un número en base 10, a base 16 dividimos entre 16 aplicando el algoritmo que se utilizó en base 2 y en base 8, en este caso si el residuo es mayor de 9 se utilizan las letras A, B, C, D, E y F.

4325	5
270	E
16	0

1	1
0	

Por lo tanto $4325 = 10E5_{16}$

1.2.2 Binario Octal Hexadecimal

Ya vimos que para cambiar de bases que no sean la decimal, podemos utilizar los algoritmos vistos y cambiar primero a base 10 y después a la otra base. Sin embargo cuando las bases involucradas son una potencia de dos, podemos hacerlo directamente los algoritmos son muy simples y directos. así es precisamente como trabaja la computadora, la única razón, como ya dijimos, que la computadora utiliza la base 10 es para su interface con el ser humano.

Es muy probable que en un futuro la humanidad utilice la base 8 y las matemáticas serás más simples y la comunicación con la computadora más directa.

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Hexadecimal	Binario
-------------	---------

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Utilizando las tablas las conversiones son directas.

Ejemplo: Convertir $A43B5_{16}$ a base 2.

Convertimos cada una las cifras con la tabla y concatenamos las respuestas.

Resultado 10100100001110110101_2

Ejemplo: Convertir 327435_8 a base 2.

Convertimos cada una las cifras con la tabla y concatenamos las respuestas.

Resultado 101010111100011101_2

Si deseamos convertir de base 2 o Octal o hexadecimal el proceso es inverso, separando en ternas para Octal y cuartetos en Hexadecimal, **de derecha a izquierda**.

Ejemplo: Convertir 100011011010011111_2 a base 16.

Separamos en cuartetos de derecha a izquierda

100011011010011111 completamos con ceros el primero 00100011011010011111

convertimos utilizando la tabla y concatenamos las respuestas.

Resultado $239F_{16}$

Ejemplo: Convertir 1010001101101001011_2 a base 8.

Separamos en ternas

1010001101101001011 completamos con ceros 001010001101101001011

convertimos utilizando la tabla y concatenamos las respuestas.

Resultado 1215513_8

Si queremos convertir entre las bases 8 y 16, podemos aplicar el mismo proceso pasando primeramente por base 2.

Ejemplo: Convertir $4EC9_{16}$ a base 8

Convertimos cada una las cifras con la tabla hexadecimal y concatenamos las respuestas

0100111011001001_2

después separamos en ternas de derecha a izquierda

0100111011001001 el primero se elimina porque es cero 100111011001001

convertimos utilizando la tabla octal y concatenamos las respuestas.

Resultado 47311_8

1.3 Operaciones básicas.

Recordemos los algoritmos para efectuar las operaciones básicas:

Adición

$$\begin{array}{r} 76.512 \\ + \\ 149.83 \\ \hline 226.342 \end{array}$$

Sustracción

$$\begin{array}{r} 628.420 \\ - \\ 555.405 \\ \hline 73.015 \end{array}$$

Multiplicación

$$\begin{array}{r} 42.5 \\ \times 6.7 \\ \hline 2975 \\ 2550 \\ \hline 284.75 \end{array}$$

Recuerde una **prueba** para **verificar** si la operación está bien hecha.

42.5	Sumando los dígitos obtenemos: 11	módulo 9 queda: 2
$\times 6.7$	Sumando los dígitos obtenemos: 13	módulo 9 queda: 4
\hline		
2975		
2550	Multiplicando los dígitos anteriores da $4 \times 2 = 8$	
\hline		
284.75	Sumando los dígitos obtenemos: 26	módulo 9 queda 8

y por ser igual al producto anterior la multiplicación es correcta.

Ahora veremos como manejar el sistema binario, el octal y el sistema base 16.

Sistema binario.

Recordemos que la representación de un número en el sistema posicional es una cadena de símbolos básicos los cuales se forman de acuerdo a la base.

Para no confundir los números a la representación en otra base distinta de diez se le escribirá dicha base al terminar el numeral que representa el número.

Ejemplo: 246_8 significa que está en base 8.

43025 significa que está en base 5.

1010011_2 significa que está en base 2.

La base que se va a utilizar, por ahora, es la base 2, tiene la ventaja de que utiliza sólo dos símbolos, llamados bits. Conjunto de bits $\{0,1\}$.

A la representación en base 2 se le llama también representación binaria.

$$\begin{aligned}\text{Ejemplo: } 10011_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 16 + 2 + 1 = 19\end{aligned}$$

(al no aparecer base la base indicada, significa base 10)

$$\begin{aligned}110.1011_2 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= 4 + 2 + 0 + .5 + .125 + .0625 = 6.6825\end{aligned}$$

Para representar un número que está en base 10 en sistema binario, deberá agruparse de dos en dos (en lugar de diez en diez que fue lo que se hizo en el sistema decimal).

Por ejemplo, analicemos el número 7

Si agrupa en pares se tienen tres pares y una unidad, si se agrupan en pares de duplos se obtiene un par y un duplo $\setminus 7 = 111_2$

Para entender mejor el sistema binario considere unas celdas donde se pueden escribir los símbolos 0 ó 1 (bits) y piense que cada celda tiene un valor dado por la siguiente figura:

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Así el número 10011_2 lo analizamos

1 0 0 1 1

2^4 2^3 2^2 2^1 2^0

16 8 4 2 1

y su representación en base 10 es $16 + 2 + 1 = 19$.

Para convertir de base 10 a binario el algoritmo resulta muy sencillo, se divide entre 2 y se anota el cociente bajo el número y el residuo a la derecha, se aplica iterativamente este procedimiento hasta llegar a 0 y al final el resultado es la cadena de bits de abajo hacia arriba.

Ejemplo 1: convertir a binario 49

49	1	$49 = 110001_2$
24	0	
12	0	
6	0	
3	1	
1	1	
0		

Ejemplo 2. Convertir 123 a binario:

123	1	$123 = 1111011_2$
61	1	
30	0	
15	1	
7	1	
3	1	
1	1	
0		

Como en el sistema binario sólo hay 2 dígitos la adición y la multiplicación resultan muy simples:

Tabla de Adición

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabla de Multiplicación

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Apliquemos el procedimiento de la suma que usamos en el sistema decimal ya que también los algoritmos son similares:

1110011₂+1001₂**11100₂****111**11011₂+1110₂**101001₂****1111 1**1101.011₂+ 110.11₂**10100.001₂**

La multiplicación también es semejante:

Nota: Para la operación de resta veremos un algoritmo en base a complementos y sumas donde no intervienen comparaciones por lo que resulta más simple en computación.

Representación Octal y Hexadecimal

Para la base 8 se utilizan los octales {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y, para convertir de base octal a decimal ó viceversa el procedimiento es similar al que se presentó en el sistema binario.

Ejemplo: $51072_8 = 5 \times 8^4 + 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 21,050$

Convertir de decimal a octal

Ejemplo:

$$381 = 575_8$$

Para convertir de octal a binario, o de binario a octal se puede lograr de manera más sencilla con el uso de la siguiente tabla:

Binario	Octal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 7 & 1 & 3_8 \\ 100 & 111 & 001 & 011 \end{array}$$

O sea que $4713_8 = 100111001011_2$

Ejemplo: 11011101110_2

Primero completar de derecha a izquierda de tres en tres agregando ceros al final si es necesario.

$$\begin{array}{cccc} 011 & 011 & 101 & 110 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{array}$$

O sea

$$11011101110_2 = 3356_8$$

Las operaciones de adición y multiplicación en base 8 se realizan similar a base 10 ya que se utiliza el principio posicional.

Para poder aplicar los algoritmos de la suma y la multiplicación es conveniente tener a la mano las tablas de la suma y la multiplicación.

Suma: La tabla de la adición:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Ejemplos de sumas:

4526₈

+371₈

5117₈

25.036₈

+ 461.15₈

506.206₈

Multiplicación: Para la multiplicación se tiene la tabla:

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

La importancia de este ejercicio es que el alumno se acostumbre a que la representación es relativa y la “tabla” de multiplicar cambia con respecto a la base.

Es importante que el número 23₈ se enuncie dos tres base ocho

Un aspecto interesante es la multiplicación rápida por 7 , donde se puede ver la analogía del número 9 en base 10 con el número 7 en base 8.

Base dieciséis.

Sistema Hexadecimal

Numerales primarios = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

Estos numerales primarios corresponden a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 en base 10.

La representación en base 16 utiliza el mismo principio:

$$\begin{aligned} \text{Así } A527_{16} &= 10 \times 16^3 + 5 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 7 \times 16^0 \\ &= 10 \times 4096 + 5 \times 256 + 32 + 7 \\ &= 40960 + 1280 + 32 + 7 \\ &= 42279 \end{aligned}$$

De manera inversa, si un número está en base 10, dividimos entre 16 aplicando el algoritmo que se utilizó en base 2 y en base 8.

$$4325 = ?$$

4325	5	$4325 = 10E5_{16}$
270	E	
16	0	
1	1	
0		

Para convertir de binario a hexadecimal o viceversa podemos usar la siguiente tabla:

Binario	Hexadecimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Ejemplo:

A D 5 3₁₆ es

1010 1101 0101 0011

o inversamente 101101101010001₂ es

0101 1011 0101 0001₂ = 5B51₁₆

5 B 5 1

La adición y la multiplicación en base 16 también se puede realizar como en base 2, 8 o 10 y se requieren las tablas

Suma: Tabla

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

1.4 Algoritmo de Booth¹

El **algoritmo de Booth** es un procedimiento algorítmico para realizar la multiplicación de dos números con signo, expresados en base binaria en notación complemento a dos.

Procedimiento

Supongamos dos números, multiplicando y multiplicador, con longitudes en bits, **x** para el primero, e **y** para el segundo:

¹ http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Booth

- Construimos una matriz de tres filas y $x+y+1$ columnas. Identificaremos las filas como, **A** la primera, **S** la segunda y **P** la tercera.
- Se inician los x primeros bits de cada fila con:
 - **A**, el multiplicando.
 - **S**, el complemento a dos del multiplicando.
 - **P**, ceros.
- Los siguientes y bits se completan con:
 - **A**, ceros.
 - **S**, ceros.
 - **P**, el multiplicador.
- Para finalizar la matriz, se inician a 0 todos los valores de la última columna.

Una vez iniciada esta matriz, se realiza el algoritmo.

- Se realizan y iteraciones del siguiente bucle.
 1. Comparar los dos últimos bits de P, para realizar la siguiente acción:
 - 00 o 11: no se hace nada.
 - 01: $P = P + A$. Se ignora el acarreo.
 - 10: $P = P + S$. Se ignora el acarreo.
- Desplazamiento aritmético de P a la derecha (se conserva el bit de signo).
- Finalmente, tras y iteraciones, se elimina el último bit de la derecha (menos significativo), obteniendo el resultado.

El **algoritmo de Booth** es un método rápido y sencillo para obtener el producto de dos números binarios con signo en notación complemento a dos.

Debemos saber que un **número binario** está formado por bits de ceros y unos, y que se puede traducir a decimal fácilmente de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 \text{0000} & \text{0110} & (6) \\
 \text{0000} & \text{0010} & (2)
 \end{array} \\
 \hline
 \text{8 bits}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & \text{multiplicando} & & & & & \text{bit extra} \\
 \text{A} = & \text{0000} & \text{0110} & \text{0000} & \text{0000} & 0 \\
 & \text{multiplicando en ca2} & & & & & \\
 \text{S} = & \text{1111} & \text{1010} & \text{0000} & \text{0000} & 0 \\
 & & & \text{multiplicador} & & & \\
 \text{P} = & \text{0000} & \text{0000} & \text{0000} & \text{0010} & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Como se puede ver en la imagen superior, partiendo de los números binarios de la multiplicación $6 \cdot 2$ (*multiplicando* y *multiplicador*) creamos tres nuevos números binarios del doble de tamaño (*16 en el ejemplo*): A, S y P.

Partiendo del número P (*producto*) comenzamos a comparar los últimos 2 bits de la derecha, siguiendo los casos base del recuadro:

CASOS BASE	
0 0 ->	No se realiza ninguna acción
0 1 ->	$P = P + A$
1 0 ->	$P = P + S$
1 1 ->	No se realiza ninguna acción

Se realizará esta comparación 8 veces en este ejemplo (*número de bits de los operandos*) y al final de cada comparación, realizamos un desplazamiento de un bit hacia la derecha, manteniendo el último bit de la izquierda, y descartando el último bit del lado contrario. Si hacemos una traza paso a paso nos quedarían los siguientes resultados:

0000	0000	0000	001	[0 0]	->
0000	0000	0000	000	[1 0]	P=P+S
1111	1010	0000	000	[1 0]	->
1111	1101	0000	000	[0 1]	P=P+A
0000	0011	0000	000	[0 1]	->
0000	0001	1000	000	[0 0]	->
0000	0000	1100	000	[0 0]	->
0000	0000	0110	000	[0 0]	->
0000	0000	0011	000	[0 0]	->
0000	0000	0001	100	[0 0]	->
0000	0000	0000	1100	[0]	(12)

Finalmente obtenemos el número en binario resultante (*12 en este ejemplo*), descartando el bit extra que hemos añadido al principio del procedimiento y que se encuentra en el extremo a la derecha.

1.5 Algoritmos de División²

Igual que en el producto, la división es muy fácil de realizar, porque no son posibles en el cociente otras cifras que UNOS y CEROS.

Consideremos el siguiente ejemplo, $42 : 6 = 7$, en binario:

101010	 110
-110	111
1001	
-110	
0110	
110	
000	

² Luis González. Profesor de Tecnologías de la Información. I.E.S. Santa Eugenia (Madrid)

Se intenta dividir el dividendo por el divisor, empezando por tomar en ambos el mismo número de cifras (100 entre 110, en el ejemplo). Si no puede dividirse, se intenta la división tomando un dígito más (1001 entre 100).

Si la división es posible, entonces, el divisor sólo podrá estar contenido **una vez** en el dividendo, es decir, la primera cifra del cociente es un UNO. En ese caso, el resultado de multiplicar el divisor por 1 es el propio divisor. Restamos las cifras del dividendo del divisor y bajamos la cifra siguiente.

El procedimiento de división continúa del mismo modo que en el sistema decimal.

Ejercicio 5:

Haz las siguientes divisiones binarias. Al terminar, comprueba los resultados haciendo las divisiones en el sistema decimal:

$$10110101000101 : 1011$$

$$10100001111011 : 10011$$

EJERCICIOS adicionales

1. Realiza las siguientes sumas de números octales:

$$365 + 23$$

$$2732 + 1265$$

$$65 + 1773$$

2. Suma los siguientes números hexadecimales:

$$17A + 3C$$

$$20F5 + 31B$$

$$2E70C + 1AA7F$$

3. Resta los siguientes números octales:

$$365 - 23$$

$$2732 - 1265$$

$$1773 - 65$$

4. Realiza las siguientes restas de números hexadecimales:

$$17A - 3C$$

$$20F5 - 31B$$

$$2E70C - 1AA7F$$

5. Convertir los siguientes números a los sistemas indicados

DECIMAL	BINARIO	OCTAL	HEXADECIMAL
29			
	100011		
		75	
231			
	1001101		
			AE2
			3EB
		654	
	1110		
128			
		27	

6. Realiza las siguientes operaciones en el sistema que se indica

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) Binario: $100110 + 1110 =$ | b) Octal: $345 + 760 =$ |
| c) Binario: $1110 \times 1011 =$ | d) Octal: $276 \times 455 =$ |
| e) Hexadecimal: $235AE + B34 =$ | f) Hexadecimal: $345B \times E6A =$ |
| g) Binario: $1111 + 1100 =$ | h) Octal: $34 + 640 =$ |
| i) Binario: $1110 \times 1001 =$ | j) Octal: $6345 \times 65 =$ |
| k) Hexadecimal: $B23A + 4B4 =$ | l) Hexadecimal: $A34C5 \times 8E9 =$ |

1.6 Complemento: Aritmética Modular

En la práctica se utiliza comúnmente la aritmética modular, por ejemplo para contestar las siguientes preguntas:

¿Qué día de la semana es hoy?

¿Qué hora es?

Es obvio que nadie contesta es el día 729,620 d.c., ó es la hora 17,510,890. Contestan: es el día 3 ó son las 10. Esto se debe en los días se identifica el 8 con el 1, el 9 con el 2 o el 729,620 con el 3 y en las horas se identifican el 25 con el 1, el 26 con el 2, y el 17,510,890 con el 10.

Esto se hace simplemente identificando dos números que tengan un mismo residuo al dividirse por 7 en el primer caso ó por 24 en el segundo.

A esta identificación se le llama congruencia modular y se representa: $\equiv (\text{mod.})$

Definición. $A \equiv B (\text{mod } n)$ si A y B tienen el mismo residuo al dividir por n.

A es congruente a B módulo n.

Así 7 y 4 son congruentes módulo 3 ó sea $7 \equiv 4 (\text{mod } 3)$. También $17 \equiv 5 (\text{mod } 12)$, por lo que las 17:00 horas son las 5:00 de la tarde.

La aritmética modular no sólo se usa para medir el tiempo, en computación se utiliza para codificar archivos y detectar si han sido modificados por ejemplo por algún virus, también es muy útil en otro tipo de codificaciones donde se utiliza la Teoría de Números.

Nos enfocaremos en los residuos módulo 9, 7 y F, que son los casos a los que se hace referencia en las “pruebas” de la multiplicación para las bases 10, 8 y 16 respectivamente. Sin embargo primeramente ilustraremos la idea en general para los enteros módulo 6 en base 10.

Como los enteros en la aritmética modular se identifican con los residuos al dividirse entre 6, solamente se utilizan los numerales: 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Así por ejemplo el 6 es 0, el 15 es 3 y el 239 es 5.

En el Aritmética Modular se puede definir la suma y la multiplicación de una manera obvia y construir su tabla, en el caso de los residuos módulo 6 tenemos:

Tabla de la suma:

+ 0 1 2 3 4 5

0 0 1 2 3 4 5

1 1 2 3 4 5 0

2 2 3 4 5 0 1

3 3 4 5 0 1 2

4 4 5 0 1 0 2

5 5 0 1 2 3 4

Lo primero que podemos observar es que esta aritmética tiene varias propiedades de los números reales, por ejemplo la ley conmutativa, esta se ve inmediatamente por la simetría de la tabla.

También tiene un elemento neutro, el 0 y cada elemento tiene un inverso aditivo, el 1 y el 5, el 2 y el 4 y el 0 y el 3 son inversos de inversos de sí mismos. Este comportamiento es diferente a los números reales ya que en dicha álgebra el único inverso de sí mismo es el 0.

- 0 1 2 3 4 5
- 0 0 0 0 0 0
- 1 0 1 2 3 4 5
- 2 0 2 4 0 2 4
- 3 0 3 0 3 0 3
- 4 0 4 2 0 4 2
- 5 0 5 4 3 2 1

Aquí también vemos que se cumple la ley conmutativa, también con la tabla se puede comprobar la ley asociativa y la distributiva. Tenemos elemento neutro, el 1. Pero ya no todo número diferente de cero tiene inverso, los únicos números con inverso son el 1 y el 5.

Aquí también notamos un aspecto interesante que no se presenta en los enteros, ni en los números reales; hay dos números que su producto es 0 y sin embargo ninguno de los dos es 0.

Esto es: $2 * 3 = 0$

En general en los enteros, si $a * b = 0$ entonces por lo menos uno de los dos enteros debe ser 0, cualquier estructura algebraica que la cumpla se dice que es un dominio integral, por ser una de las propiedades básicas de los enteros. Por lo tanto el álgebra formada por las clases residuales módulo 6 no son un dominio integral.

Revise las siguientes ligas:

<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/aritmetica.html>

<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/numeracion.html>

http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/aritmetica.html#Suma_en_binario

<http://www.monografias.com/trabajos34/numeracion-software/numeracion-software.shtml#binario>

2. CONJUNTOS

Competencia específica a desarrollar: Resolver problemas que impliquen operaciones y propiedades de conjuntos, utilizando leyes y diagramas.

2.1 Características de los conjuntos.

DEFINICIÓN: La palabra conjunto generalmente la asociamos con la idea de agrupar objetos, por ejemplo un conjunto de discos, de libros, de plantas de cultivo y en otras ocasiones en palabras como hato, rebaño, piara, parcelas, campesinado, familia, etc., es decir la palabra conjunto denota una colección de elementos claramente entre sí, que guardan alguna característica en común. Ya sean números, personas, figuras, ideas y conceptos.

En matemáticas el concepto de conjunto es considerado primitivo y ni se da una definición de este, sino que se trabaja con la notación de colección y agrupamiento de objetos, lo mismo puede decirse que se consideren primitivas las ideas de elemento y pertenencia.

La característica esencial de un conjunto es la de estar bien definido, es decir que dado un objeto particular, determinar si este pertenece o no al conjunto. Por ejemplo si se considera el conjunto de los números dígitos, sabemos que el 3 pertenece al conjunto, pero el 19 no. Por otro lado el conjunto de las bellas obras musicales no es un conjunto bien definido, puesto que diferentes personas puedan incluir distintas obras en el conjunto.

Los objetos que forman un conjunto son llamados **miembros o elementos**. Por ejemplo el conjunto de las letras de alfabeto; a, b, c, ..., x, y, z. que se puede escribir así:

$$\{ a, b, c, \dots, x, y, z \}$$

Como se muestra el conjunto se escribe entre llaves ({}), o separados por comas (,).

El detallar a todos los elementos de un conjunto entre las llaves, se denomina **forma tabular, extensión o enumeración de los elementos**.

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, por ejemplo:

El conjunto { a, b, c } también puede escribirse:

$$\{ a, c, b \}, \{ b, a, c \}, \{ b, c, a \}, \{ c, a, b \}, \{ c, b, a \}$$

En teoría de conjuntos se acostumbra **no repetir** a los elementos por ejemplo:

El conjunto { b, b, b, d, d } simplemente será { b, d }.

NOTACIÓN: Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas : A, B, C,... por ejemplo:

$A = \{ a, c, b \}$ $B = \{ primavera, verano, otoño, invierno \}$

El símbolo \in indicará que un elemento pertenece o es miembro de un conjunto. Por el contrario para indicar que un elemento no pertenece al conjunto de referencia, bastará cancelarlo con una raya inclinada / quedando el símbolo como \notin .

Ejemplo: Sea $B = \{ a, e, i, o, u \}$, $a \in B$ y $c \notin B$

2.1.1 Conjunto universo, vacío

UNIVERSO O CONJUNTO UNIVERSAL: El conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia recibe el nombre de conjunto Universal, este conjunto depende del problema que se estudia, se denota con la letra U y algunas veces con la letra S (espacio muestral).

Por ejemplo si solo queremos referirnos a los 5 primeros números naturales el conjunto queda:

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

Forma alternativa para indicar conjuntos de gran importancia:

- Conjunto de números naturales (enteros mayores que cero) representados por la letra **N** donde

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

- Conjunto de números enteros positivos y negativos representados por la letra **Z** donde

$$Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

- Conjunto de números racionales (números que se representan como el cociente de dos números enteros {fracciones }). Estos números se representan por una **Q**
- Conjunto de números irracionales (números que no puedan representarse como el cociente de dos números enteros) representados por la letra **I**.
- Conjunto de los números reales que son los números racionales e irracionales es decir todos, representados por **R**.

Todos estos conjuntos tienen un número infinito de elementos, la forma de simbolizarlos por extensión o por enumeración es de gran utilidad cuando los conjuntos a los que se hace

referencia tienen pocos elementos para poder trabajar con ellos se emplean la notación llamada **comprensión**.

Por ejemplo, la denotar el conjunto de los números naturales menores que 60. Aquí U es el conjunto N y se tiene una propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto: ser menores que 60.

Para indicar esta situación empleamos la simbología del álgebra de conjuntos:

$$\{ x/x \in N ; x < 60 \}$$

En esta expresión se maneja un conjunto de x que pertenece a los números naturales (N) y además que los valores de x son menores que 60.

Ahora si se desea trabajar con conjuntos que manejen intervalos estos pueden ser representados por medio de una expresión algebraica; supongamos que se desea expresar los números enteros (Z) entre -20 y 30 el conjunto quedaría de la manera siguiente:

$$\{ x/x \in Z ; -20 \leq x \leq 30 \}$$

También se puede expresar el valor de un conjunto indicando la pertenencia o no pertenencia a uno diferente, por ejemplo

$$L = \{ 1, 3, 4, 6, 9 \}$$

$$P = \{ x/x \in N ; x \notin L \}$$

En el conjunto P se indica que los elementos x de un conjunto pertenecen a los números naturales y además x no pertenece al conjunto L .

CONJUNTO VACÍO: Es un conjunto que carece de elementos. Se suele llamarle conjunto nulo, y se le denota por el símbolo \emptyset o $\{ \}$.

Ejemplos:

$$A = \{ \text{Los perros que vuelan} \} = \{ \} = \emptyset$$

$$B = \{ x / x \text{ es un mes que tiene 53 días} \} = \{ \} = \emptyset$$

$$C = \{ x / x^3 = 8 \text{ y } x \text{ es impar} \} = \{ \} = \emptyset$$

$$D = \{ x / x \text{ es un día de 90 horas} \} = \{ \} = \emptyset$$

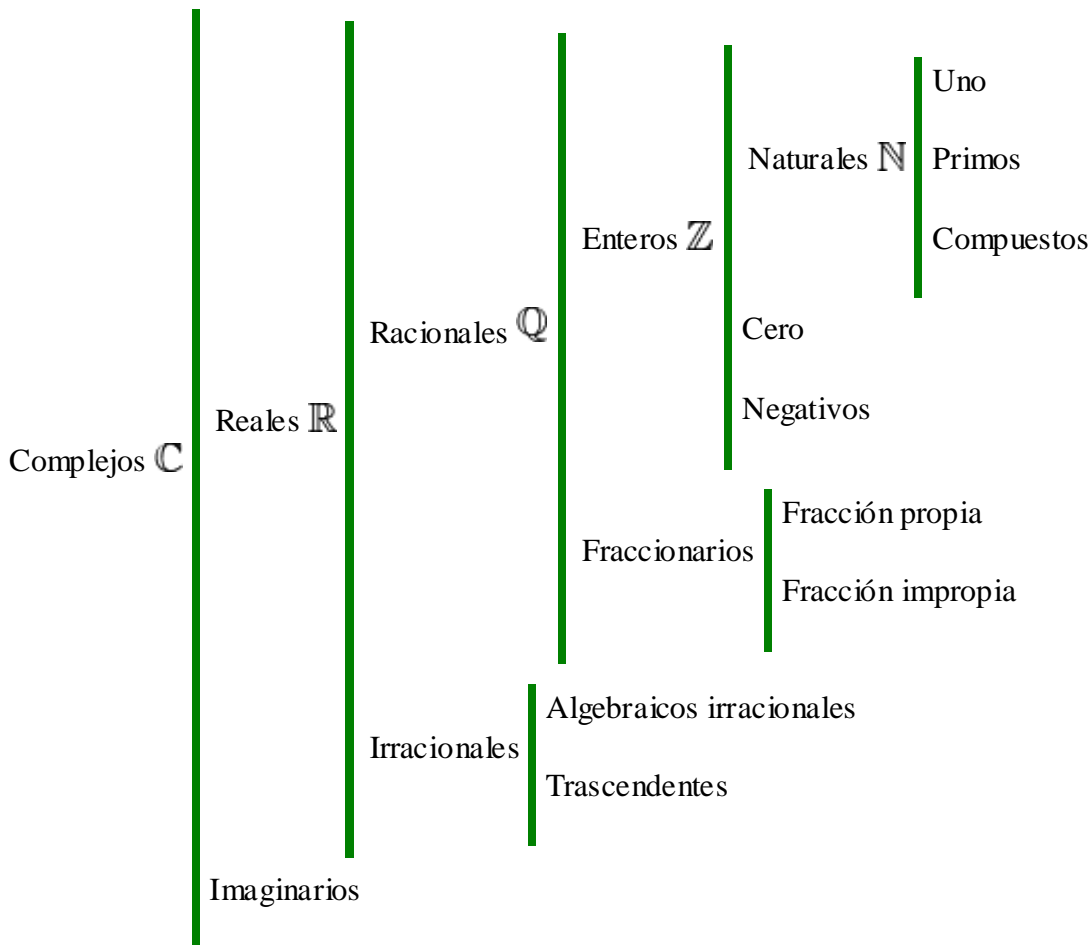
2.1.2 Números naturales, enteros, racionales, reales e imaginarios

Los números se clasifican en Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales.

Los números más conocidos son los números naturales, que se usan para contar. Éstos, conjuntamente con los números negativos, conforman el conjunto de los enteros. Cocientes de enteros generan los números racionales. Si se incluyen todos los números que pueden expresarse con decimales pero no con fracciones de enteros (irracionales), se habla entonces de los números reales; si a éstos se les añade los números complejos, se obtendrán todos los números necesarios para resolver cualquier ecuación algebraica. Pueden añadirse también los infinitos, los hiperreales y los transfinitos. Entre los reales, existen números que no son soluciones de una ecuación polinomial o algebraica, que reciben el nombre de transcendentales. Ejemplos famosos de estos números son el número π (Pi) y el número e (este último base de los logaritmos naturales), los cuales están relacionados entre sí por la identidad de Euler.

Existe toda una teoría de los números, que clasifica a los números en:

Números



Una vez entendido el problema de la naturaleza y la clasificación de los números, surge otro, más práctico, pero que condiciona todo lo que se va a hacer con ellos: la manera de escribirlos. El sistema que se ha impuesto universalmente es la numeración posicional, gracias al invento del cero, con una base constante. Más formalmente, en *The concept of number*, el matemático Frege realiza una definición de «número», la cual fue tomada como referencia por muchos matemáticos (entre ellos Russell, cocreador de *principia mathematica*):

«n» es un número, es entonces la definición de «que existe un concepto “F” para el cual “n” aplica», que a su vez se ve explicado como que «n» es la extensión del concepto «equinumerable con» para «F», y dos conceptos son equinumerables si existe una relación «uno a uno» (véase que no se utiliza el símbolo «1» porque no está definido aún) entre los elementos que lo componen (es decir, una biyección en otros términos).

También Frege, tanto como cualquier otro matemático, se ven inhabilitados para definir al número como la expresión de una cantidad, porque la simbología matemática no hace referencia necesaria a la numerabilidad, y el hecho de «cantidad» referiría a algo numerable, mientras que números se adoptan para definir la cardinalidad de, por ejemplo, los elementos que se encuentran en el intervalo abierto $(0, 1)$, que contiene innumerables elementos (el continuo).

Peano, antes de establecer sus cinco proposiciones sobre los números naturales, explicita que supone sabida una definición (quizás debido a su «obviedad») de las palabras o conceptos *cero*, *sucesor* y *número*. De esta manera postula:

- 0 es un número,
- el sucesor de todo número es un número,
- dos números diferentes no tienen el mismo sucesor,
- 0 no es el sucesor de ningún número,
- y la propiedad inductiva.

Sin embargo, si uno define el concepto *cero* como el número 100, y el concepto *número* como *los números mayores a 100*, entonces las cinco proposiciones mencionadas anteriormente

aplican, no a la idea que Peano habría querido comunicar, sino a su formalización. La definición de número se encuentra por ende no totalmente formalizada, aunque se encuentre un acuerdo mayoritario en adoptar la definición enunciada por Frege. Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos.

Notación: Puesto que los números naturales se utilizan para contar objetos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos. Dependiendo del autor y la tradición, el conjunto de los números naturales puede definirse entonces de dos maneras distintas:

- Definición sin el cero:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Definición con el cero:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

donde la \mathbb{N} de *natural* se suele escribir en “**Negrita**”.

Ambas definiciones son utilizadas en distintas áreas de las matemáticas. Históricamente, el uso del cero como numeral fue introducido en Europa en el siglo XII, pero no se consideraba un número natural. La no inclusión del cero es habitual por ejemplo en teoría de números.

Sin embargo, con el desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX, el cero se incluyó en las definiciones conjuntistas de los números naturales. Esta convención prevalece en dicha disciplina, y otras, como la teoría de la computación. Para distinguir ambas definiciones a veces se introducen símbolos distintos. Por ejemplo, incluyendo el cero en los naturales, a los números naturales sin el cero, o enteros positivos se les denota como \mathbb{N}^* .

Los **números enteros** son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1, 2, 3, ...), los negativos de los números naturales (... , -3, -2, -1) y al cero, 0. Los enteros negativos, como -1 ó -3 (se leen "menos uno", "menos tres", etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo "más" delante de los positivos: +1, +5, etc.

El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$, que proviene del alemán *Zahlen* ("números", pronunciado ['tsa:lən]).

Los números enteros no tienen parte decimal. Por ejemplo:

-783 y 154 son números enteros

$45,23$ y $-34/95$ no son números enteros

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, de forma similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado.

Los números enteros extienden la utilidad de los números naturales para contar cosas. Pueden utilizarse para contabilizar pérdidas: si en un colegio entran 80 alumnos nuevos de primer curso un cierto año, pero hay 100 alumnos de último curso que pasaron a educación secundaria, en total habrá $100 - 80 = 20$ alumnos menos; pero también puede decirse que dicho número ha aumentado en $80 - 100 = -20$ alumnos.

También hay ciertas magnitudes, como la temperatura o la altura toman valores por debajo del cero. La altura del Everest es 8848 metros por encima del nivel del mar, y por el contrario, la orilla del Mar Muerto está 423 metros por debajo del nivel del mar; es decir, su altura se puede expresar como -423 m.

En sentido amplio, se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero (una fracción común). El término racional alude a ración o parte de un todo, y no al pensamiento o actitud racional.

En sentido estricto, número racional es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada; de todas ellas, se toma como *representante canónico* de dicho número racional a la [fracción irreducible].

Definimos un número racional como un decimal finito o infinito periódico (por ejemplo, el número decimal finito 0,75 es la representación decimal del número racional $\frac{3}{4}$. El número decimal infinito periódico 0,333... es la representación decimal del número racional $\frac{1}{3}$). El número racional permite resolver ecuaciones del tipo $ax = b$, cuando a y b son números enteros (con «a» distinto de cero).

El conjunto de los números racionales se denota por \mathbb{Q} , que significa «cociente» (*Quotient* en varios idiomas europeos). Este conjunto de números incluye a los números enteros y es un subconjunto de los números reales. Las fracciones equivalentes entre sí –número racional– son una clase de equivalencia, resultado de la aplicación de una relación de equivalencia al conjunto de números fraccionarios.

Los números racionales cumplen la propiedad arquimediana o de densidad, esto es, para cualquier pareja de números racionales existe otro número racional situado entre ellos, propiedad que no estaba presente en los números enteros, por lo que los números racionales son *densos* en la recta de los números reales.

En matemáticas, un **número irracional** es cualquier número real que no es racional, es decir, es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros, con n diferente de cero y donde esta fracción es irreducible.

Notación: No existe una notación universal para indicarlos, como \mathbb{I} que no es generalmente aceptada. Las razones son que el conjunto de Números Irracionales no constituyen ninguna estructura algebraica, como sí lo son los Naturales (\mathbb{N}), los Enteros (\mathbb{Z}), los Racionales (\mathbb{Q}), los Reales (\mathbb{R}) y los Complejos (\mathbb{C}), por un lado, y que la \mathbb{I} es tan apropiada para designar al conjunto de Números Irracionales como al conjunto de Números Imaginarios Puros, lo cual puede crear confusión. Fuera de ello, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es la denotación del conjunto por definición. Tras

distinguir los números componentes de la recta real en tres categorías: (naturales, enteros y racionales), podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aun quedan "huecos" por rellenar en la recta de los números reales. Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos que dejan los números racionales. Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, puede definirse al número irracional como un decimal infinito no periódico. En general, toda expresión en números decimales es solo una aproximación en números racionales al número irracional referido, por ejemplo, el número racional 1,4142135 es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional raíz cuadrada de 2, el cual posee infinitas cifras decimales no periódicas. Entonces, decimos con toda propiedad que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en 7 decimales, o bien es *igual* a 1,4142135... donde los tres puntos hacen referencia a los infinitos decimales que hacen falta y que jamás terminaríamos de escribir.

Debido a ello, los números irracionales más conocidos son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes

1. π (Número "pi" 3,1415 ...): razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

2. e (Número "e" 2,7182 ...): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

3. Φ (Número "áureo" 1,6180 ...): $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

1.- Número algebraico: Son la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de radicales libres o anidados; si "x" representa ese número, al eliminar radicales del segundo miembro mediante operaciones inversas, queda una ecuación algebraica de cierto grado. Todas las raíces no exactas de cualquier orden son irracionales algebraicos. Por ejemplo, el número áureo es una de las raíces de la ecuación algebraica $x^2 - x - 1 = 0$, por lo que es un número irracional algebraico.

2.- Número trascendente: No pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.) También surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que no lleva periodo definido, respectivamente, como los dos siguientes:

0,193650278443757...

0,101001000100001...

Los llamados números trascendentes tienen especial relevancia ya que no pueden ser solución de ninguna ecuación algebraica. Los números π y e son irracionales trascendentes, puesto que no pueden expresarse mediante radicales. Los números irracionales no son numerables, es decir, no pueden ponerse en biyección con el conjunto de los números naturales. Por extensión, los números reales tampoco son contables ya que incluyen el conjunto de los irracionales.

2.1.3 Subconjuntos

Sean los conjuntos $A = \{ 0, 1, 2, 3, 5, 8 \}$ y $B = \{ 1, 2, 5 \}$

En este caso decimos que B está contenido en A , o que B es subconjunto de A . En general si A y B son dos conjuntos cualesquiera, decimos que B es un subconjunto de A si todo elemento de B lo es de A también.

Por lo tanto si B es un subconjunto de A se escribe $B \subset A$. Si B no es subconjunto de A se indicará con una diagonal $\not\subset$.

Note que \in se utiliza solo para elementos de un conjunto y \subset solo para conjuntos.

2.1.4 Conjunto potencia

Dado un conjunto, se llama **conjunto potencia** o **conjunto de partes** de S (se denota por $P(S)$ o 2^S) al conjunto de todos los subconjuntos de S . En la teoría de conjuntos basada en los Axiomas de Zermelo-Fraenkel, la existencia del conjunto potencia se establece por el axioma del conjunto potencia.

Por ejemplo, si $S = \{ a, b, c \}$ entonces el conjunto potencia de S es $P(S) = \{ \{ \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$.

2.2 Operaciones con conjuntos (Unión, Intersección, Complemento, Diferencia y diferencia simétrica)

UNIÓN: La unión de dos conjuntos A y B la denotaremos por $A \cup B$ y es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de ellos ó a los dos. Lo que se denota por:

$$A \cup B = \{ x/x \in A \text{ ó } x \in B \}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ y $B = \{ 10, 11, 12 \}$

$$A \cup B = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12 \}$$

INTERSECCIÓN

Sean $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \}$ y $B = \{ 2, 4, 8, 12 \}$

Los elementos comunes a los dos conjuntos son: $\{ 2, 4, 8 \}$. A este conjunto se le llama intersección de A y B; y se denota por $A \cap B$, algebraicamente se escribe así:

$$A \cap B = \{ x/x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Y se lee el conjunto de elementos x que están en A y están en B.

Ejemplo:

Sean $Q = \{ a, n, p, y, q, s, r, o, b, k \}$ y $P = \{ l, u, a, o, s, r, b, v, y, z \}$

$$Q \cap P = \{ a, b, o, r, s, y \}$$

CONJUNTO VACÍO

Un conjunto que no tiene elementos es llamado conjunto vacío ó conjunto nulo lo que denotamos por el símbolo \emptyset .

por ejemplo:

Sean $A = \{ 2, 4, 6 \}$ y $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ encontrar $A \cap B$.

$$A \cap B = \{ \} = \emptyset$$

El resultado de $A \cap B = \{ \}$ muestra que no hay elementos entre las llaves, si este es el caso se le llamará conjunto vacío ó nulo y se puede representar como: $A \cap B = \emptyset$

CONJUNTOS AJENOS

Sí la intersección de dos conjuntos es igual al conjunto vacío, entonces a estos conjuntos les llamaremos conjuntos ajenos, es decir:

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces A y B son ajenos.

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto respecto al universo U es el conjunto de elementos de U que no pertenecen a A y se denota como A' y que se representa por comprensión como:

$$A' = \{ x \in U / x \notin A \}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

$$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \} \text{ donde } A \subset U$$

El complemento de A estará dado por:

$$A' = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

DIFERENCIA

Sean A y B dos conjuntos. La diferencia de A y B se denota por $A - B$ y es el conjunto de los elementos de A que no están en B y se representa por comprensión como:

$$A - B = \{ x / x \in A ; x \notin B \}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \{ a, b, c, d \} \text{ y}$$

$$B = \{ a, b, c, g, h, i \}$$

$$A - B = \{ d \}$$

En el ejemplo anterior se observa que solo interesan los elementos del conjunto A que no estén en B. Si la operación fuera $B - A$ el resultado es

$$B - A = \{ g, h, i \}$$

E indica los elementos que están en B y no en A.

Diagramas de Venn: Es una representación de las clases o conjuntos mediante círculos que se intersecan.

Por ejemplo: Sean las clases:

C1: los profesores

C2: los humanos

C3: los buenos docentes

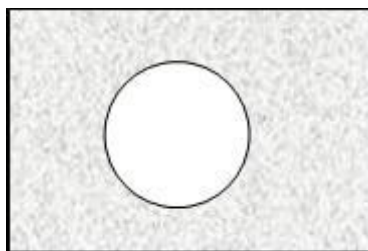
Para poder representar un diagrama de Venn se necesita de un razonamiento de la siguiente forma (tomando como base las clases):

Todo C1 es C2

Todo C3 es C2

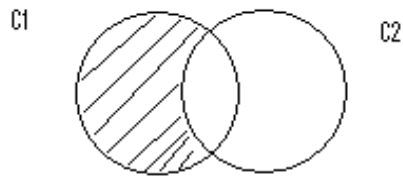
• • • Todo C1 es C3

Los diagramas sirven, en ocasiones, para visualizar las operaciones que se pueden realizar con conjuntos a si el universo se representa mediante rectángulos y los conjuntos que se extraen mediante curvas cerradas.



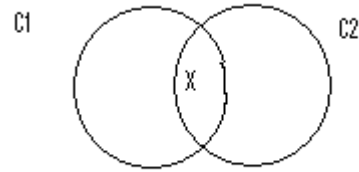
Conjunto o Clase

UNIVERSALES

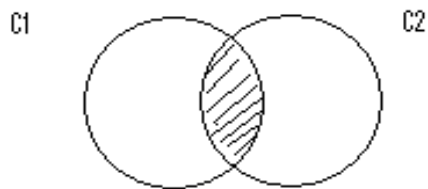


Todo C1 es C2

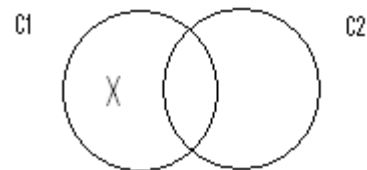
EXISTENCIALES



Algunos C1 están en C2



Ningún C1 está en C2



Algunos C1 no están en C2

Los diagramas de Venn son útiles para determinar la validez de razonamientos relacionados con proposiciones categóricas.

Sean los siguientes argumentos

Todos los profesores son humanos

Todos los buenos docentes son humanos

• • • Todos los profesores son buenos docentes

Podemos presentar el razonamiento en la forma:

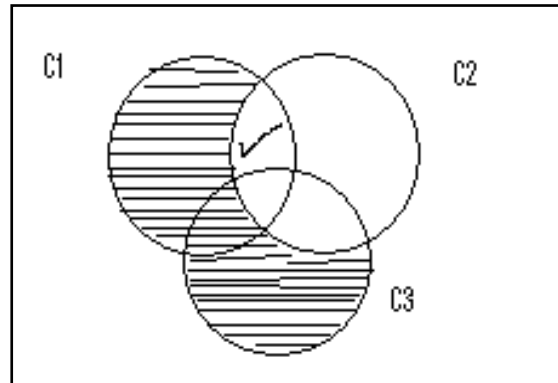
Todo C1 es C2

Todo C3 es C2

• • •

Todo $C1$ es $C3$

El diagrama de Venn Que representa la hipótesis se representa:



Considere la región que tiene la marca palomeada, como esta región no está sombreada, no es vacía necesariamente, es decir pueden haber elementos de $C1$ que no estén en $C3$. Por lo tanto la conclusión no es correcta por lo que **El razonamiento es falso.**

Ejercicio 1: Utiliza diagramas de Venn para determinar si los siguientes razonamientos son válidos:

1.- Algunos votantes no son Mexicanos

Algunas personas no son votantes

- • Algunas personas no son Mexicanos

2.- Todos los árboles son grafos

Algunas estructuras no son grafos

- • Algunas estructuras no son árboles

3.- Todos los perros tienen dos patas

Todos los animales de dos patas son carnívoros

- • • Todos los animales de dos patas son carnívoros

4.- Algunos enteros no son números perfectos

Todos los enteros son números reales

- • • Algunos números reales no son números perfectos

Revise también el siguiente texto que se encuentra en la biblioteca del TESOEM:

📖 Johnsonbaugh Richard Matemáticas discretas Ed. Grupo editorial Iberoamericano Pág. 31

2.3 Propiedades de los conjuntos.

Propiedades de la inclusión

- i) $A \subset A$
- ii) $\emptyset \subset A$
- iii) $A \subset B \Rightarrow B \not\subset A$; sólo si $A = B$
- iv) $A \subset B$ y $B \subset \Delta \Rightarrow A \subset \Delta$

Propiedades de la unión e intersección

- | | | |
|---------------------|---|---|
| i) Identidad | $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap H = A$ |
| ii) Idempotencia | $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| iii) Conmutatividad | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| iv) Asociatividad | $(A \cup B) \cup \Delta = A \cup (B \cup \Delta)$ | $(A \cap B) \cap \Delta = A \cap (B \cap \Delta)$ |
| v) Distributividad | $(A \cup B) \cap \Delta = (A \cap \Delta) \cup (B \cap \Delta)$ | $(A \cap B) \cup \Delta = (A \cup \Delta) \cap (B \cup \Delta)$ |
| vi) Absorción | $A \cup (A \cap B) = A$ | $A \cap (A \cup B) = A$ |

vii) Complementariedad $A \cup A^c = H$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Nota: A todo conjunto en el que se hayan definido dos operaciones que tengan estas propiedades, se le denomina *Algebra de Boole*.

Función de conjunto: toda regla que de un modo perfectamente determinado haga corresponder un número real a cada elemento del conjunto. Se representa por

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

el número x que le corresponde al elemento a , se representa por $x = f(a)$. Se denomina *imagen de la función* al conjunto de números que están en correspondencia con algún elemento, a través de la función.

$$\text{im } f = \{ x \in \mathbb{R}; a \in A, f(a) = x \}$$

2.4 Aplicaciones de conjuntos

Problema 1: Conos de helado

Hay conos de dos sabores: chocolate y vainilla. Usted y sus 24 amigos (25 personas en total), van a comprar conos. Si 15 personas compran conos de vainilla y 20 conos de chocolate, ¿cuántas personas compraron conos de chocolate y vainilla?

Problema 2: Barras de chocolate

Un grupo de 50 personas va al supermercado a comprar barras de chocolate. Cada persona compra como mínimo una barra. El supermercado vende dos tipos de barras de chocolate: con relleno y sin relleno. Si 45 personas compran de los dos tipos de barras, y 47 compran como mínimo una barra con relleno cada uno, ¿cuántas personas compraron únicamente barras de chocolate sin relleno?

Problema 3: Invasión de extraterrestres

Un grupo de 100 extraterrestres llega en la nave Estrella 2000 para invadir su planeta. Estos extraterrestres se distinguen por dos características: sus ojos y sus colas. Algunos de ellos

tienen ojos, pero no tienen cola, otros tienen cola pero no tienen ojos, y otros tienen ojos y cola. Si hay 75 extraterrestres que tienen ojos y 50 que tienen ojos y cola, ¿cuántos de ellos tienen ojos pero no tienen cola? ¿Cuántos tienen solamente cola?

Problema 4: Paseo al zoológico

Un grupo de 30 estudiantes decide ir de paseo al zoológico. Hay dos exhibiciones principales abiertas para visitas: la pajarera y la cueva del león. Ocho estudiantes visitan la pajarera, de los cuales seis visitan también la cueva del león. ¿Cuántos estudiantes visitan únicamente la cueva del león? ¿Cuántos estudiantes visitan únicamente la pajarera?

Problema 5: Fiesta de disfraz

Hay 70 niños en la ciudad de Cartagena, y todos se van a vestir en forma especial para ir a una fiesta. Hay dos actividades para la noche de la fiesta: un baile y un concurso de disfraz. Si 30 niños fueron tanto al baile como al concurso de disfraz, y solamente 24 niños fueron únicamente al baile, ¿cuántos niños en total participaron en el concurso de disfraz? ¿Cuántos fueron únicamente al concurso de disfraz?

Problema 6: Cine

Actualmente se están exhibiendo dos películas en un teatro de la ciudad: *Ficción Increíble 3* y *Las matemáticas en las estrellas*. Un total de 68 personas asistieron al teatro. Si 35 personas vieron *Las matemáticas en las estrellas*, y 10 vieron tanto *Ficción Increíble 3* como *Las matemáticas en las estrellas*, ¿cuántas personas vieron únicamente *Ficción Increíble 3*? ¿Cuántos boletos se vendieron en total en el teatro?

Problema 7: Bebidas

Se anotaron 75 órdenes de bebidas en un restaurante, donde se ofrecen dos tipos de bebidas: jugo de naranja y leche. Si 59 personas tomaron jugo de naranja y 18 tomaron leche, ¿cuántas personas tomaron tanto leche como jugo de naranja?

Problema 8: Deportes

Hay 100 atletas y tres estaciones diferentes en que se presentan deportes: fútbol en el otoño, basketball en el invierno y baseball en la primavera. Algunos de los atletas juegan solamente un deporte, otros dos y otros tres. Cuarenta personas juegan fútbol. Si 15 juegan los tres deportes, 5 juegan basketball y fútbol, pero no baseball, y 10 juegan solamente fútbol, ¿cuántas personas juegan tanto baseball como fútbol?

Problema 9: Mascotas

Hay 49 personas que tienen mascotas. 15 personas tienen únicamente perros, 10 tienen únicamente gatos, 5 personas tienen perro y gato y 3 tienen gato, perro y serpientes. ¿Cuántas serpientes hay?

Problema 10: Juegos de computador

Tres juegos populares de computador son: La invasión de los extraterrestres, Las carreras de carros y Fútbol de lujo. Cincuenta personas de su barrio tienen juegos de computador. 16 tienen los tres juegos, 5 tienen Las carreras de carros, 7 tienen Fútbol de lujo, y 19 tienen únicamente La invasión de los extraterrestres. En total ¿cuántos juegos de computador hay en su vecindario?

LISTA DE EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Conteste correctamente a cada cuestión:

1. Escribe cinco conjuntos por extensión y cinco conjuntos por comprensión.
2. Dados los siguientes conjuntos $A = \{a, e, i, 6, 8, 9\}$ $B = \{a, i, o, 1, 2, 3\}$ $C = \{a, e, u, 0, 6, 7\}$ $D = \{a, i, 3, 5, 6, 7\}$, Siendo el Universo todas las vocales y todos los dígitos.

Determine las siguientes operaciones, escribiendo explícitamente los elementos del conjunto resultante:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 3. a) $A \cup B$ | b) $A \Delta E$ | c) $(D \cup B) \cap (C - A)$ |
| 4. d) $(B \cap C) \cup (D \cap A)$ | e) $A \cap B \cap C$ | f) $(A - D) \cup (A \cap B)$ |
| 5. g) A^c | h) $(A \cup D)^c$ | i) $(B \cap C)^c \cup D$ |
| 6. j) $(D \Delta A) \cup C$ | k) $A \times B$ | l) $B \times A$ |

3. LÓGICA MATEMÁTICA

Competencia específica a desarrollar: Analizar y resolver problemas computacionales utilizando las técnicas básicas de lógica e inducción matemática

3.1 Lógica proposicional.

Lo más importante en matemáticas y computación es conocer la veracidad de una aseveración.

La palabra lógica viene del griego y significa, razón, tratado o ciencia. Y en computación es la ciencia que estudia la forma de razonar correctamente, la que nos indica la forma correcta de obtener conclusiones y los métodos conocidos para lograrlo.

La lógica como cualquier ciencia y como la filosofía busca la verdad y es la que establece las reglas para hacer un razonamiento correcto. Aquí debemos distinguir entre pensamiento correcto y verdadero, la lógica proporciona una herramienta para saber si un desarrollo es correcto, pero la veracidad del mismo dependerá de las premisas o sea las condiciones de las que se parte.

Por ejemplo, si el maestro dice que todos los alumnos que traigan la tarea tendrán un punto extra en el examen. Si Juan me dice que llevó la tarea se puede concluir correctamente que obtuvo un punto más. Este es un razonamiento correcto, sin embargo la veracidad de la conclusión depende de la veracidad de las dos premisas. Si por ejemplo Juan me dijo mentiras y no entregó la tarea, ya no podemos estar seguros de que la conclusión es verdad. Lo mismo sucede si el maestro no cumple su promesa y cambia de opinión acerca de subir un punto, o si el maestro no ha estudiado lógica.

Resumiendo: Si las condiciones dadas (premisas) son verdaderas, la lógica nos enseña métodos de razonamiento o inferencia correctos para saber en qué casos la conclusión es también verdadera.

La Lógica es importante para los estudiantes de computación primeramente porque proporciona una forma de saber si un desarrollo es correcto, tanto en matemáticas como en otras materias de ciencias; pero también es importante porque nos presenta el lenguaje de expresiones booleanas que utilizamos en los diferentes lenguajes de Programación, en Bases de Datos, y cualquier otra materia de computación que utilice conceptos lógicos.

3.1.1 Concepto de proposición

En computación frecuentemente se usan estructuras que dependen solamente de dos valores, así por ejemplo tenemos el sistema numérico binario que se utiliza para representar los números utilizando solamente 0 y 1.

El trabajar con sólo 2 opciones facilita la implementación de los conceptos y simplifica su manejo. Así una teoría resulta mucho más fácil de establecer y de justificar si tiene sólo dos valores asociados, que otra por ejemplo una estructura de álgebra de números que tiene una cantidad infinita.

Otro tipo de entes que se utilizan en computación que también está asociado a “dos” opciones, es lo que se conoce como expresiones booleanas. Estas expresiones, que deben su nombre a George Boole, se pueden ver caracterizadas como verdaderas ó falsas y de acuerdo a esta condición se desarrolla el estudio sobre dichos conceptos. Este tema se conoce como cálculo de proposiciones.

Los argumentos son una de las formas más comunes en matemáticas, en lógica y en computación de establecer razonamientos para llegar a la verdad. Si tenemos un conectivo lógico **OR** de dos valores de entrada y después un inversor, cuál es la salida. O si en un programa con una instrucción tipo **if** se tiene la condición $X > 3$ **and** $X < 10$ cómo se sabe si se ejecutó el comando.

Podemos tener también situaciones como:

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto: Sócrates es mortal.

Si lo comparamos con:

Todos lo árboles son verdes.

Todos lo pericos son verdes.

Por lo tanto: Todos los árboles son pericos.

Una pregunta importante es, ¿cómo saber si un razonamiento es válido? En general, la lógica proporciona los métodos para saber si un argumento es correcto y poder obtener conclusiones.

Un argumento es un conjunto de premisas, condiciones dadas, junto con una conclusión. Y decimos que un argumento es válido si la conclusión es verdadera siempre que las premisas lo son.

Uno de los principales propósitos de la lógica es por lo tanto encontrar la forma de poder saber si un argumento es válido o no. A esto le llamamos inferencia y está en la sección de Reglas de Inferencia.

Antes de poder decidir un argumento es válido o no, debemos de empezar por estudiar sus componentes, los elementos más simples que componen un argumento se llaman elementos atómicos.

Empezaremos por decir que en lógica proposicional utilizaremos dos valores asociados llamados valores de verdad, que son verdadero (V) y falso (F), y en computación a las expresiones que se les asocia uno de estos dos valores se les llama expresiones booleanas.

Los enunciados o expresiones del lenguaje se pueden clasificar en: Propositiones lógicas, Propositiones abiertas y Frases o expresiones indeterminadas.

Proposición lógica. Expresiones que pueden ser verdaderas o falsas pero no ambas.

Proposición abierta. Una expresión que contiene una o más variables y al sustituir las variables por valores específicos se obtiene una proposición lógica.

Frases. Todas las expresiones que no cumplen alguna de las dos definiciones anteriores.

Expresiones Booleanas. Propositiones lógicas y propositiones abiertas.

Ejemplos

i) México está en América	Proposición Lógica
ii) $1 < 2$	Proposición Lógica
iii) Hoy es lunes	Proposición Abierta
iv) $x + 3 = 5$	Proposición Abierta
v) Ecosistemas	Frase

vi) Buenos días	Frase
vii) El 3 de abril de 1970 fue domingo	Proposición Lógica
viii) Los cocodrilos pueden volar	Proposición Lógica
ix) Las matemáticas son agradables	Proposición Abierta
x) Esta expresión es falsa	Frase

Combinando dos o más proposiciones se pueden formar expresiones compuestas con los operadores, estos operadores también se llaman conectivos lógicos y se presentan en la siguiente sección.

3.1.2 Proposiciones compuestas (Disyunción, Conjunción, Negación, Condicional, Bicondicional)

Como se mencionó en el tema de argumentos para formar expresiones compuestas necesitamos conectivos lógicos, empezaremos por un conectivo unitario; esto es, se aplica a una proposición sola.

La Negación

La operación unitaria de negación, **no es cierto que** se representa por “ \neg ” y tiene la siguiente tabla de verdad de verdad

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo. Encuentre la negación de las expresiones siguientes:

- i) Júpiter es un planeta
- ii) El pizarrón es verde
- iii) El número real x es negativo
- iv) Algún elefante es de color rosa
- v) Ningún pez respira fuera del agua
- vi) Todos los leones son feroces

Solución:

- i) Júpiter no es un planeta
- ii) El pizarrón no es verde
- iii) El número real x no es negativo o también El número real x es positivo ó cero
- iv) Ningún elefante es de color rosa
- v) Algún pez respira fuera del agua
- vi) Algún león no es feroz

En la siguiente sección veremos operadores binarios, con esto será suficiente para construir cualquier fórmula válida en lógica de proposiciones. La jerarquía que utilizaremos es que la negación se efectúa primero que los demás operadores, aparte de esta no imponemos ninguna otra, esto con el fin de que se acostumbren a la utilización de paréntesis. Posteriormente es posible adoptar cualquiera de las jerarquías usuales, una vez que ya se entendió y practicó suficiente con las fórmulas lógicas establecidas de esta manera.

Conjunción

La **conjunción** de las proposiciones p , q es la operación binaria que tiene por resultado p y q , se representa por $p \wedge q$, y su tabla de verdad es:

p	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción nos sirve para indicar que se cumplen dos condiciones simultáneamente, así por ejemplo si tenemos:

La función es creciente y está definida para los números positivos, utilizamos

$p \wedge q$, donde

p : la función es creciente

q : la función está definida para los números positivos

Así también: $p \wedge q$, donde

p : el número es divisible por 3

q : el número está representado en base 2

se lee: El número es divisible entre 3 y está representado en base 2.

Nota: Observamos que para la conjunción $p \wedge q$ será verdadera si las dos expresiones que intervienen deben ser verdaderas y sólo en ese caso como se indica por su tabla de verdad.

Disyunción

La **disyunción** de dos proposiciones p, q es la operación binaria que da por resultado p ó q , notación $p \vee q$, y tiene la siguiente tabla:

p	Q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Con la disyunción a diferencia de la conjunción, representamos dos expresiones y que afirman que una de las dos es verdadera, por lo que basta con que una de ellas sea verdadera para que la expresión $p \vee q$ sea verdadera.

Así por ejemplo la expresión: el libro se le entregará a Juan o el libro se le entregará a Luis significa que si va uno de los dos, el libro se le entrega, si van los dos también se entrega y solamente en caso de que no vaya ninguno de los dos no se debe entregar.

Aquí debemos tener cuidado, porque en el idioma español muchas veces utilizamos la disyunción para representar otros operadores que aparentemente son lo mismo, pero que tienen diferente significado.

En español tenemos tres casos de disyunción:

La llamada y/o bancaria, lógica o matemática, que es la misma y se utiliza en computación como el operador **OR**, este operador corresponde al mencionado anteriormente $p \vee q$ y ya se mostró su tabla de verdad.

La o excluyente, que algunos también le llaman o exclusiva, y que indica que una de las dos proposiciones se cumple, pero no las dos. Este caso corresponde por ejemplo a: Hoy compraré un libro o iré al cine; se sobrentiende que una de las dos debe ser verdadera, pero no la dos. Se representa por $p \text{ XOR } q$ y su tabla de verdad es:

p	Q	p XOR q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por último, también es muy común utilizar una disyunción como la siguiente: El menú incluye café o té. En este caso se está dando una disyuntiva diferente pues no se pueden las dos simultáneamente como en el caso anterior, pero aquí si es válido el caso donde las dos son falsas. Es el caso “no ambas”, se puede representar por $p \S q$ y su tablas es

p	Q	$p \S q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Nota: El último símbolo no es estándar y puede haber varias formas de representarlo.

Un buen ejercicio consiste en enunciar varias expresiones del español que utilizando los conectivos y o para analizar cuál de los operadores es.

Hay que tener mucho cuidado cuando se traduce del lenguaje usual por las costumbres, muchas veces depende del contexto o de la situación específica en la que se usan los conectivos, por ejemplo si decimos: Se pueden estacionar alumnos y maestros, en realidad se está queriendo decir un operador disyuntivo, en este caso la o matemática, o sea el primer operador que corresponde a la primera tabla de esta sección.

Condicional

La **condicional** de dos proposiciones p, q da lugar a la proposición; si p entonces q, se representa por $p \rightarrow q$, y su tabla de verdad está dada por:

P	Q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Con respecto a este operador binario, lo primero que hay que destacar es que no es conmutativo, a diferencia de los dos anteriores la conjunción y la disyunción. El único caso que resulta falso es cuando el primero es verdadero y el segundo falso.

Por ejemplo, si p es llueve y q es hay nubes entonces:

$p \rightarrow q$ es, si llueve entonces hay nubes.

También cabe señalar que este viene a ser el operador más importante en el proceso deductivo y que la mayoría de las leyes de inferencia y las propiedades en matemáticas se pueden enunciar utilizando este operador.

Bicondicional

La **bicondicional** de dos proposiciones p , q da lugar a la proposición; p si y sólo si q , se representa por $p \leftrightarrow q$ su tabla de verdad está dada por:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Jerarquía de Operadores.

Combinando los operadores anteriores podemos formar nuevas expresiones.

En términos formales la negación de p , deberá ser $(\neg p)$, así como la conjunción de p y q sería $(p \wedge q)$. Con el uso de paréntesis evitamos la ambigüedad, por ejemplo $\neg p \wedge q$ podría significar dos cosas distintas

Por un lado podría significar: $((\neg p) \wedge q)$ O también: $(\neg (p \wedge q))$.

En la práctica para no usar tantos paréntesis se considera que el operador \neg tiene jerarquía sobre \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow . Así $\neg p \wedge q$ significa $((\neg p) \wedge q)$.

En algunos casos se considera \wedge , \vee tienen mayor jerarquía que \leftrightarrow por lo que $p \leftrightarrow q \vee r$ sería $(p \leftrightarrow (q \vee r))$ y también que \wedge tiene prioridad sobre \vee , por lo que $p \wedge q \vee r$ sería $(p \wedge q) \vee r$.

Así por ejemplo, en electrónica, para representar circuitos lógicos se utiliza $+$ en lugar de \vee y \cdot en lugar de \wedge .

Por lo que $p \cdot q + r$ es $((p \wedge q) \vee r)$.

En estos apuntes no se considerará jerarquía en ninguno de los operadores binarios \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow por lo que utilizaremos paréntesis. Sólo \neg tiene prioridad sobre los demás operadores. Esto nos ahorra algunos paréntesis, por ejemplo: $((\neg p) \wedge q) \vee r$ se representa por $(\neg p \wedge q) \vee r$.

3.1.3 Tablas de verdad

Como ya sabemos la sintaxis en lógica es la forma correcta de escribir una fórmula y la semántica es lo que significa. Como en lógica solamente tenemos dos valores una fórmula solamente puede ser verdadera o falsa. Para determinar su valor seguimos las reglas simples que dimos en las definiciones básicas de acuerdo a su tabla de verdad. Esto lo hacemos mediante interpretaciones. Una interpretación de una fórmula es un conjunto de valores que se les asignan a sus proposiciones atómicas.

Al interpretar una fórmula lo que finalmente vamos a obtener es un valor de verdad, bien sea verdadero o falso. Pero para poder encontrarlo muchas veces el proceso es laborioso porque puede estar formada por varias proposiciones atómicas. Primeramente se le asignan valores de verdad a los átomos y se puede encontrar el valor de la expresión.

Si deseamos hacerlo en general, debemos analizar todas las posibilidades, esto se puede hacer construyendo una tabla de verdad. Para fines prácticos cuando se tienen varios átomos las tablas de verdad no resultan prácticas por lo que analizaremos solamente expresiones con tres átomos como máximo.

Por supuesto que se puede construir una tabla para un número mayor de átomos, pero notemos que por cada átomo que se aumente el número de renglones se duplica. Esto es, para un

átomos son dos renglones, para dos átomos son cuatro, para tres átomos son ocho, para cuatro dieciséis, etc.

Algoritmo para construir una tabla de verdad de una fórmula en lógica de proposiciones.

1. Escribir la fórmula con un número arriba de cada operador que indique su jerarquía. Se escriben los enteros positivos en orden, donde el número 1 corresponde al operador de mayor jerarquía. Cuando dos operadores tengan la misma jerarquía, se le asigna el número menor al de la izquierda.

2. Construir el árbol sintáctico empezando con la fórmula en la raíz y utilizando en cada caso el operador de menor jerarquía. O sea, del número mayor al menor.

3. Numerar las ramas del árbol en forma secuencial empezando por las hojas hacia la raíz, con la única condición de que una rama se puede numerar hasta que estén numerados los hijos. Para empezar con la numeración de las hojas es buena idea hacerlo en orden alfabético, así todos obtienen los renglones de la tabla en el mismo orden para poder comparar resultados.

4. Escribir los encabezados de la tabla con las fórmulas siguiendo la numeración que se le dio a las ramas en el árbol sintáctico.

5. Asignarle a los átomos, las hojas del árbol, todos los posibles valores de verdad de acuerdo al orden establecido. Por supuesto que el orden es arbitrario, pero como el número de permutaciones es $n!$, conviene establecer un orden para poder comparar resultados fácilmente.

6. Asignar valor de verdad a cada una de las columnas restantes de acuerdo al operador indicado en el árbol sintáctico utilizando la tabla de verdad correspondiente del Tema de Conexiones Lógicas y Jerarquías. Conviene aprenderse de memoria las tablas de los operadores, al principio pueden tener un resumen con todas las tablas mientras se memorizan.

7. La última columna, correspondiente a la fórmula original, es la que indica los valores de verdad posibles de la fórmula para cada caso.

Ejemplo. Construya la tabla de verdad de las siguientes expresiones lógicas:

i) $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$

ii) $p \rightarrow (q \wedge r)$

iii) $(p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \vee p)$

iv) $\neg (p \neg q) \rightarrow \neg r$

v) $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg (q \vee \neg r)$

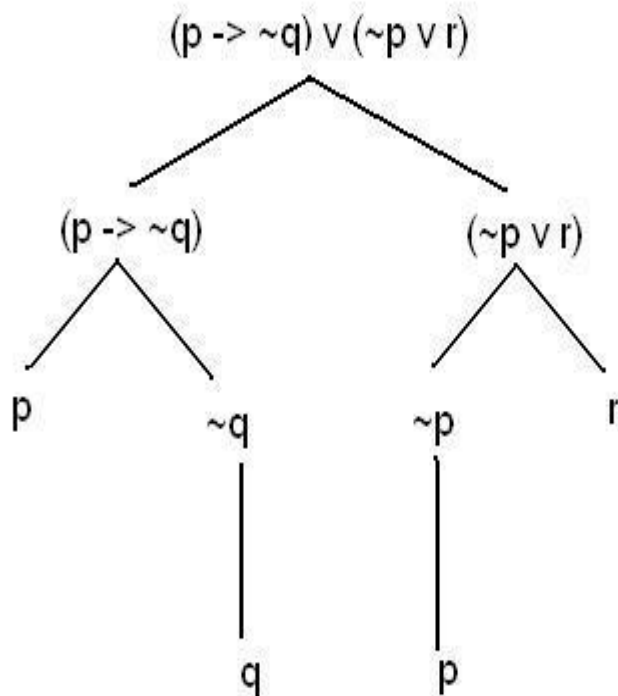
Solución:

i) Seguimos los pasos del algoritmo con la fórmula $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$

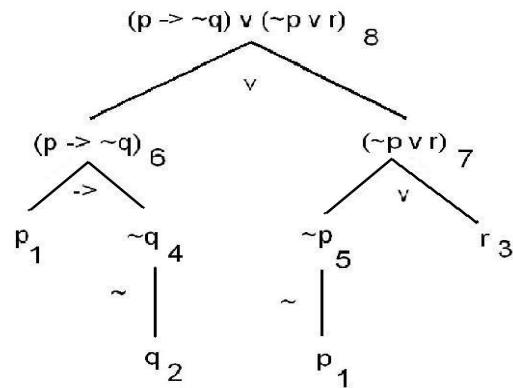
1. Vemos que los operadores de los paréntesis tienen mayor jerarquía, empezamos por el paréntesis izquierdo por lo que la fórmula con jerarquías marcadas sería:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 1 & & 5 & 3 & 4 \\ (& p & \rightarrow & \neg & q &) & \vee & (& \neg & p & \vee & r &) \end{array}$$

2. Construir el árbol Sintáctico empezando a descomponer por el operador con el número mayor, seguir en orden descendente hasta el último que es el que tiene el número 1.



3. Numerar las ramas del árbol



4. Escribir los encabezados de la tabla utilizando las fórmulas en el árbol siguiendo la numeración del paso 3.

5. Asignar valores de verdad a los átomos, en este caso, las tres primeras columnas.

6. Completar el resto de las columnas utilizando las definiciones de los operadores.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee r$	$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

7. La última columna es el resultado da cada interpretación establecida en los primeros tres renglones.

Los demás problemas son similares y se obtienen las tablas siguientes.

ii)

1	2	3	4	5
P	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

iii)

1	2	3	4	5	6	7
P	q	r	$\neg r$	$p \rightarrow \neg r$	$q \vee r$	$(p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \vee r)$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F

iv)

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg r$	$\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$
V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V

v)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	Q	r	$\neg r$	$\neg p$	$q \vee \neg r$	$\neg p \wedge q$	$\neg(q \vee \neg r)$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg(q \vee \neg r)$
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V

3.1.4 Tautologías, contradicción y contingencia

Definición: Una **tautología** es una expresión lógica que es verdadera para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Ejemplo 1: La expresión $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg r)$ es una tautología

p	Q	r	$\neg r$	$p \wedge q$	$p \vee \neg r$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V

Vemos que la última columna tiene únicamente V por lo que se comprueba que es una tautología.

3.1.5 Equivalencias Lógicas

Junto con las tautologías un concepto muy utilizado es el de equivalencia.

Definición: Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Ejemplo: Las dos fórmulas siguientes son equivalentes:

$$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r) \quad \neg p \vee \neg q \vee r$$

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee r$	$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

donde se puede observar que la última y la antepenúltima columnas son iguales.

Las equivalencias se relacionan con las tautologías de la siguiente forma.

Teorema: Si dos fórmulas lógicas son equivalentes, entonces, la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.

Si F es equivalente a G , entonces $F \leftrightarrow G$ es una tautológica.

La propiedad inversa también se cumple pues si una bicondicional es una tautología, las fórmulas que la componen son equivalentes. El teorema y su inverso se comprueban directamente de la tabla de verdad de la bicondicional..

Tautologías fundamentales

Ley del medio excluido	$p \vee \neg p$
Ley de no contradicción	$\neg (p \wedge \neg p)$
Modus ponendo ponens	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Modus tollendo tollens	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
Silogismo Disyuntivo	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

La comprobación de cualquiera de las tautologías anteriores es directa, es suficiente hacer la tabla de verdad y se obtendrá la columna correspondiente a la fórmula con valores de verdaderos únicamente.

Equivalencias

Doble negación	$\neg (\neg p)$	=	$\leftrightarrow p$
Implicación y disyunción	$p \rightarrow q$	\equiv	$\neg p \vee q$
Contrapositiva	$p \leftrightarrow q$	\equiv	$\neg q \leftrightarrow \neg p$
Negación de la Implicación	$\neg (p \rightarrow q)$	\equiv	$p \wedge \neg q$

La expresión $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$ pues

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

3.1.6 Reglas de inferencia

Primero presentamos los tipos de inferencia, la inferencia válida en computación y matemáticas y al final una serie de reglas que se utilizan para la inferencia deductiva.

La inferencia es la forma en la que obtenemos conclusiones en base a datos y declaraciones establecidas.

Un argumento, por ejemplo es una inferencia, donde las premisas son los datos o expresiones conocidas y de ellas se desprende una conclusión.

Una inferencia puede ser: Inductiva, deductiva, transductiva y abductiva.

Inductiva (de lo particular a lo general)

Aquí por ejemplo si durante la primera semana el maestro llega 10 minutos tarde, podemos concluir que todo el semestre va a llegar tarde. Esta conclusión no necesariamente es válida porque puede ser que el maestro algún día llegue temprano. En general una inferencia inductiva es la que se desprende de una o varias observaciones y en general no podemos estar seguros de que será verdadero lo que concluimos.

En este caso podemos mencionar el ejemplo de “el mentiroso”: Un joven le dice a un amigo, tu todos los días dices mentiras, y el contesta, no es cierto, ayer en todo el día no dije una sola mentira.

Resumiendo, la inferencia inductiva es la ley general que se obtiene de la observación de uno o más casos y no se puede asegurar que la conclusión sea verdadera en general.

Deductiva (de lo general a lo particular)

Cuando se conoce una ley general y se aplica a un caso particular, por ejemplo se sabe que siempre que llueve hay nubes, concluimos que el día de hoy que está lloviendo hay nubes.

También se conoce como inferencia deductiva cuando tenemos un caso que analiza todos los posibles resultados y de acuerdo a las premisas sólo hay una posible situación, en este caso

decimos que la situación única es la conclusión. Es este caso estamos seguros de que si las premisas son verdaderas entonces la conclusión también lo es.

Transductiva (de particular a particular o de general a general) con el mismo caso del maestro que llega tarde durante los primeros días y concluimos que el lunes siguiente también llegará tarde. O del amigo que varias veces nos ha mentido y concluimos que lo que nos dice en ese momento es mentira.

El anterior sería de particular a particular, un caso de general a general es por ejemplo de un compañero maestro que la primera vez que impartió matemáticas discretas observó que todos los alumnos estudiaban, concluyó que para el siguiente semestre todos los alumnos iban a estudiar.

Este es un caso donde como en el caso inductivo, no podemos estar seguros de que la conclusión es verdadera.

Abductiva es semejante a la deductiva, también utiliza la estrategia de analizar todas las posibilidades, pero en este caso hay varios casos que se pueden presentar, como por ejemplo si se sabe que siempre que llueve hay nubes y se sabe que hay nubes se puede concluir que llueve, pero no se tiene la certeza, al igual que el caso inductivo y transductivo no es una forma válida de obtener conclusiones en matemáticas o en lógica y es necesario conocer más información para poder verificar la validez.

Ejemplo: Dadas las condiciones escritas antes de la raya, qué podemos concluir?

Si llueve hay nubes.

Hay nubes.

Si haces la tarea te llevo al cine.

Lo vimos en el cine.

Si se hace el experimento en un salón de clases o con un grupo de personas, en el primer caso todos contestan que no se sabe pues puede o no llover. Sin embargo en el segundo caso casi todos coinciden en que sí hay conclusión y que se está seguro que hizo la tarea.

Analicemos los casos simbólicamente, en el primero:

p: llueve

q: hay nubes

con símbolos queda:

$p \rightarrow q$

q

En el segundo caso

p: hacer la tarea

q: llevarlo al cine

con símbolos:

$p \rightarrow q$

q

Observamos que en ambos casos es la misma estructura del argumento, por lo que en los dos casos se puede sacar conclusión válida o en ninguno. Pero no es posible que en uno sí y en el otro no.

La respuesta correcta es que en ningún caso se puede obtener conclusión válida. A continuación se presentan los cuatro casos posibles de argumento con una condicional simple, de los cuales dos tienen conclusión válida y dos no.

INFERENCIA DEDUCTIVA CON UNA CONDICIONAL

$A \rightarrow C$	$A \rightarrow C$
A	$\neg A$
-----	-----
C (MPP)	No hay
 $A \rightarrow C$	 $A \rightarrow C$
C	$\neg C$
-----	-----
No hay	$\neg A$ (MTT)

Notamos que tanto el primero, como el último son argumentos válidos; mientras que en los otros dos no hay conclusión. El primero se llama MPP: Modus Ponendo Ponens y el último MTT: Modus Tollendo Tollens, están en latín y en español MPP podría ser Ley de Afirmar Afirmando o de Poner Poniendo y MTT quedaría Ley de Negar Negando o Quitar Quitando. Sin embargo es costumbre nombrarlos en latín.

En general podemos decir que estas dos reglas de inferencia son las esenciales, y cualquier demostración se podría realizar con el uso de MPP y de MTT, pero es muy conveniente tener algunas otras reglas de inferencia, sobretodo porque en muchos resulta complicado cambiarlo a la forma MPP o MTT, por lo que tener una lista de reglas de inferencia resulta ser muy útil para realizar demostraciones.

Reglas de Inferencia Deductiva

MPP Modus ponendo ponens

$$A \rightarrow B$$

$$A$$

$$B$$

MTT Modus tollendo tollens

$$A \rightarrow B$$

$$\neg B$$

$$\neg A$$

SD Silogismo Disyuntivo

$$A \vee B$$

$$\neg A$$

$$\neg B$$

SH Silogismo hipotético

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow C$$

$$A \rightarrow C$$

LS Ley de simplificación

$$A \wedge B$$

$$A$$

LA Ley de adición

$$A$$

$$A \vee B$$

CONTRAPOSITIVA

$$A \rightarrow B$$

$$\neg B \rightarrow \neg A$$

La comprobación de las reglas anteriores es directa y basta hacer fórmula con la conjunción de las premisas condicionar la conclusión y probar que es una tautología, por ejemplo haciendo una tabla y obtener todos los valores verdaderos.

3.1.7 Argumentos válidos y no válidos

En lugar de deducción preposicional es deducción proposicional, aunque un nombre más general podría ser inferencia. La inferencia es un procediendo para obtener conclusiones, hay tres tipos de inferencia: Por inducción, por deducción y por abducción.

Por inducción es de lo particular a lo general, esto es de muchas observaciones concluir una regla general.

Por deducción es de lo general a lo particular, esto es de un regla general se concluye un caso particular.

Por abducción de particular a particular o de general a general.

En lógica proposicional solo se admite la deducción como procedimiento válido para obtener conclusiones, los otros métodos se pueden utilizar en probabilidad, estadística, lógica difusa, ciencias, etc.

Primeramente consideraremos algunas reglas de inferencia deductiva, esto es, obtener alguna conclusión en base a hechos conocidos.

La forma de inferencia más antigua es modus ponendo ponens (MPP) y que se puede expresar:

Regla de Inferencia: Modos Ponens (MP)

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$q$$

Primero notemos que para cualquier tipo de inferencia se debe tener algo conocido, en este caso lo que está antes de la raya, las proposiciones se llaman premisas. Y lo que está debajo de la raya se llama conclusión.

Esta inferencia es válida porque siempre que $p \rightarrow q$ y p son verdaderas también lo es q .

En general una inferencia es válida si cuando las premisas son verdaderas la conclusión también lo es, o sea

La inferencia es válida si $(A1 \wedge \dots \wedge An) \rightarrow C$ es tautología.

Como sabemos por la sección anterior que $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ es una tautología:

$p \rightarrow q$

p

q

es una inferencia válida. Las inferencias más importantes que se usan para comprobar otras inferencias se llaman reglas de inferencia.

Demostración.

Para comprobar que una inferencia es válida se debe demostrar. Una demostración es un conjunto de pasos donde el último paso es la conclusión, cualquiera de los siguientes pasos es válido:

Premisa; en cualquier paso se puede usar una premisa, esto es, lo que suponemos válido.

Equivalencias; cualquier paso puede ser un equivalente de un paso anterior.

Regla de Inferencia; en cualquier paso se puede escribir la conclusión de una regla de inferencia si sus premisas son pasos anteriores.

Propiedades previas; cualquier teorema o propiedad conocida puede ser usado en un paso en particular cualquier inferencia valida.

Para poder hacer una comprobación es conveniente tener algunas identidades y reglas de inferencia válidas.

Reglas de Inferencia:

(MPP) Modus Ponendo Ponens

$p \rightarrow q$

p

q

(MTT) Modus Tollendo Tollens

$$p \rightarrow q$$

$$\neg q$$

$$\neg p$$

(SD) Silogismo Disyuntivo

$$p \vee q$$

$$\neg p$$

$$q$$

(LS) Ley de Simplificación

$$p \vee q$$

$$p$$

Ejemplo. Comprobar $t \rightarrow s, \neg q \rightarrow \neg s, t \models q$

Comprobación 1.

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| 1. $t \rightarrow s$ | premisa |
| 2. $\neg q \rightarrow \neg s$ | premisa |
| 3. t | premisa |
| 4. s | MPP (1,3) |
| 5. q | MTT (2,4) |

Comprobación 2

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| 1. $t \rightarrow s$ | premisa |
| 2. $\neg q \rightarrow \neg s$ | premisa |
| 3. t | premisa |
| 4. s | MPP (1,3) |
| 5. $s \rightarrow q$ | =(2) |
| 6. q | MPP (4,5) |

Como se puede ver la regla de inferencia modus tollendo tollens (MTT), no es necesaria si usamos identidades, sin embargo, muchas personas prefieren usarla porque es un paso menos.

3.1.8 Demostración formal (Directa, Por contradicción)

Si una fórmula tiene la forma $A \rightarrow B$ y es una tautología, en donde A y B pueden ser proposiciones compuestas, entonces decimos que B se desprende lógicamente de A y se representa por $A \models B$.

También podemos considerar tautologías de la forma $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$

Entonces esta implicación es verdadera sin importar los valores de verdad de cualquiera de sus componentes. En este caso, se dice que q se desprende lógicamente de p_1, p_2, \dots, p_n . Se escribe.

$p_1, p_2, \dots, p_n \models q$

o también

p_1

p_2

.

.

.

p_n

—

q

Significa que si se sabe que p_1 es verdadera, p_2 es verdadera, ..., y p_n también es verdadera, entonces estamos seguros que q es verdadera.

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones de este tipo. Donde las p_i son llamadas hipótesis o premisas, y q es llamada conclusión.

Demostrar el teorema, es demostrar que la implicación es una tautología. Note que no estamos tratando de demostrar que q (la conclusión) es verdadera, sino solamente que q es verdadera si todas las p_i son verdaderas. Toda demostración debe comenzar con las hipótesis, seguidas de las tautologías y reglas de inferencia necesarias, hasta llegar a la conclusión.

A continuación se prueba un enunciado en donde se puede apreciar el uso tanto de las tautologías como de las reglas de inferencia.

Ejemplo. Sean

p: Trabajo.

q: Ahorro.

r: Compraré una casa.

s: Podré guardar mi carro en mi casa.

Analizar el siguiente argumento:

“Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar mi carro en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar mi carro en mi casa, entonces no ahorro”.

El enunciado anterior se puede representar como:

$(p \vee q) \rightarrow r$

$r \rightarrow s$

$\neg s \rightarrow \neg q$

Equivale también a probar el siguiente teorema:

$((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s) \vee (\neg s \rightarrow \neg q)$

Como se trata de probar un teorema de la forma general:

$p_1, p_2, \dots, p_n \models q$

Se aplica el procedimiento general para demostración de enunciados válidos. A continuación se demuestra el teorema respaldando cada uno de sus pasos en tautologías o reglas de inferencia ya conocidas.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1. $(p \vee q) \rightarrow r$ | Premisa en la Hipótesis |
| 2. $r \rightarrow s$ | Premisa en la Hipótesis |
| 3. $\neg s$ | Premisa Adicional |
| 4. $\neg r$ | MTT(2,3) |
| 5. $\neg(p \vee q)$ | MTT(1,4) |
| 6. $\neg p \wedge \neg q$ | Ley de De Morgan(5) |
| 7. $\neg q$ | LS(6) |

Explicación. Se puede notar que las primeras son hipótesis, la línea 3 es una Premisa adicional, porque lo que se quiere comprobar es una condicional. La línea 4 a 7 se obtuvieron aplicando reglas de inferencia. Se indica la regla de inferencia aplicada por medio del número de la derecha, y las líneas a las cuales se les aplicó dicha regla de inferencia por medio de los números de la izquierda. También es conveniente numerar los pasos.

Con esto comprobamos que el argumento es válido.

El ejemplo anterior es una demostración sencilla, pero se puede aplicar el procedimiento para casos más complicados.

Demostración por contradicción.

El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante a la que se realizó por el método directo con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino además se incluye en la demostración una línea con la negación de la conclusión. Por otro lado el objetivo de la demostración es llegar a una contradicción.

La demostración del siguiente teorema por el método de contradicción es como se indica

$$[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \rightarrow t] \wedge (p \vee s) \models t$$

Demostración

- 1.- $p \rightarrow (q \wedge r)$ Premisa en la Hipótesis
- 2.- $(q \vee s) \rightarrow t$ Premisa en la Hipótesis
- 3.- $p \vee s$ Premisa en la Hipótesis
- 4.- $\neg t$ Premisa Adicional, Negación de la conclusión
- 5.- $\neg(q \vee s)$ MTT(2,4), regla 25
- 6.- $\neg q \wedge \neg s$ Ley de De Morgan(5), 6ª
- 7.- $\neg q$ LS(6), regla 20
- 8.- $\neg s$ LS(6), regla 20
- 9.- p SD(3,8), regla 21
- 10.- $q \wedge r$ MPP(1,9), regla 24
- 11.- q 12; LS, regla 29
- 12.- $q \wedge \neg q$ Conjunción(7,11), regla 23
- 12.- Contradicción.

Note que juntamente con las premisas se debe incluir la negación de la conclusión. En este momento ya se tienen los elementos para llevar a cabo demostraciones. Es conveniente plantear varios enunciados, para que se representen con simbología lógica en forma de teorema. Que ese mismo teorema lo represente con su tabla de verdad y se haga la correspondiente demostración por los dos métodos antes mencionados.

La forma en que se aprende a aplicar reglas de inferencia es semejante a la manera en que deberá realizar una factorización o una aplicación de una fórmula en cálculo diferencial o integral o la fórmula que debe aplicar para resolver un problema en física. Lo que debe aprender es a relacionar los distintos conocimientos para poder llegar a la solución. Es importante mencionar que el camino que debe seguir no es el mismo que el maestro sigue sino uno distinto pero que ambos llegan al resultado.

Implicación Tautológica

La implicación es probablemente el concepto de lógica más utilizado por el ser humano, se usa en cualquier desarrollo matemático para indicar que un paso se obtiene de otro de manera correcta. Se utiliza para enunciar teoremas y propiedades, casi todas las propiedades se pueden enunciar utilizando la implicación. Es también muy utilizado en el razonamiento humano en ciencias sociales, filosofía, e incluso en la vida diaria casi todo mundo hace implicaciones constantemente. Sin embargo como se puede observar hasta ahora no se ha visto el concepto.

Lo primero que podemos observar es que vimos el operador condicional. Y este operador es la base para definir la implicación.

Definición. La implicación \rightarrow de dos fórmulas lógicas es la condicional cuando dicha condicional es una tautología.

Con símbolos: $A \vee B$ significa que $A \rightarrow B$ es una tautología.

O sea que para poder utilizar la implicación, $A \vee B$ debemos estar seguros de que la expresión $A \rightarrow B$ es verdadera siempre.

Ejemplo:

$$x + 5 = 8 \quad \vee \quad x = 3$$

Claramente es una implicación, pues no se puede presentar el caso de que $x + 5 = 8$ sea verdadero y $x = 3$ falso, entonces para cualquier valor de x , la expresión es verdadera y por lo tanto una tautología.

Precisamente el sentido de la implicación, $A \vee B$ es asegurar que cuando A es verdadero tenemos la certeza de que B también es verdadero, o sea que es suficiente que A se cumpla para que se cumpla B . También incluye el caso de que si B es falso estamos seguros de que A también debe ser falso, por lo que B es una condición necesaria para A .

En general debido a la importancia que tiene la implicación es conveniente poder enunciarla y entenderla de varias formas para poder obtener mejor provecho del concepto. Aquí presentamos algunas maneras equivalentes de enunciar la implicación.

Equivalencias de la implicación

A \vee B

Si A entonces B

Si A, B

Si A B

B si A

Siempre que sucede A sucede B

No puede suceder B si no sucede A

B es una consecuencia de A

A sólo si B

A es razón suficiente para B

B es razón necesaria para A

Todas las formas de enunciar la implicación se pueden entender más claramente si analizamos la tabla de la condicional, teniendo claramente en cuenta que el segundo renglón no puede ocurrir, pues la expresión es una tautología.

3.2 Lógica de predicados.

Definición

Una fórmula en lógica de predicados es una expresión que se puede obtener mediante alguna de las formas siguientes:

i) $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde p es un símbolo que representa un predicado y x_1, x_2, \dots, x_n son símbolos de variable.

ii) $(\neg F)$ donde F es una fórmula de lógica de predicados.

iii) $(F <OP> G)$ donde F y G son fórmulas de lógica de predicados y <OP> es cualquiera de los operadores $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

iv) $(\forall x) F$, donde F es un fórmula en lógica de predicados.

v) $(\exists x) F$, donde F es un fórmula en lógica de predicados.

Nota: El paréntesis encerrando las expresiones en (ii) y (iii) es con el fin de evitar ambigüedades en las interpretaciones igual que en lógica de proposiciones.

Es claro que para poder asignar un valor de verdad a una proposición debemos conocer el predicado y los valores de las variables.

Primeramente nos enfocaremos a dos casos que consideran las fórmulas con variables. Esto corresponde a los siguientes temas.

En cálculo de predicados tenemos expresiones con variables, las variables pertenecen a un conjunto o dominio previamente determinado. Por lo que es muy importante definir el dominio cuando interpretamos una fórmula mediante un predicado específico.

Ejemplo: x es alumno del TESOEM, que se podría representar por $T(x)$, aquí el predicado T es “alumno del TESOEM” y el dominio podría ser el conjunto de los estudiantes del TESOEM. Otro caso es: x es azul, se representa $A(x)$, el predicado “es de color azul” y podemos poner el dominio como el conjunto de los libros.

Una variable, en estos casos x , represente un valor cualquiera del dominio dado, y cuando le asignamos un valor específico a la variable se llama instancia o lo que programa mencionado como particularización.

Así por ejemplo: Juan Pérez es alumno del TESOEM es una instancia del primer ejemplo y Mi libro de matemáticas es azul es una instancia del segundo ejemplo.

En el primer caso podríamos considerar como dominio el conjunto de todos los alumnos del TESOEM, también podría ser sólo los alumnos de nivel profesional o también podríamos tener a todos los alumnos de México. Por eso es muy importante que se especifique con toda claridad el dominio. La importancia de delimitar el dominio se verá más claramente en la siguiente sección de Cuantificadores.

3.2.1 Cuantificadores

Dos casos centrales en el cálculo de predicados se presentan cuando se analiza si el predicado se cumple para la población completa y cuando se analiza para ver si cumple para un caso en particular al menos. Estos dos casos se llaman Universal y Particular o Existencial vienen a ser la interpretación o la semántica de los símbolos de cuantificadores que se vieron en la sección 1.4 Cálculo de Predicados Definición y se definen de la siguiente forma:

Cuantificador Universal. El cuantificador universal **para todo** asociado a una expresión de cálculo de predicados F se representa por la expresión $(\forall x) F$ y es verdadera cuando todas las instancias de la fórmula son verdaderas al sustituir la variable x en la fórmula por cada uno de los valores posibles del dominio.

Así por ejemplo si tenemos que la fórmula es $T(x)$ donde T representa “es alumno del TESOEM” y x representa un alumno de los Reyes, la fórmula $(\forall x) T(x)$ es falsa pues sabemos que hay alumnos en el TESOEM que no son de los Reyes.

Cuantificador Existencial. El cuantificador existencial **al menos uno** o **existe uno** asociado a una expresión de cálculo de predicados F se representa por la expresión $(\exists x) F$ y es verdadera cuando por lo menos una instancia de la fórmula es verdadera al sustituir por la variable x uno de los valores posibles del dominio.

Así por ejemplo en el mismo caso del anterior la expresión $(\exists x) T(x)$ es verdadera pues sabemos que sí es verdad que al menos un estudiante de los Reyes es alumno del TESOEM.

Hay expresiones dentro del español que son muy utilizadas como por ejemplo, Todos los alumnos son estudiosos, Todos los hombres son mortales o Todos los alumnos de Computación estudian lógica. En este caso estamos tomando una parte del dominio para establecer una característica universal, esto se puede hacer mediante la combinación de dos predicados de una variable conectados mediante una condicional y tomando el cuantificador universal.

Así por ejemplo: Todos los alumnos son estudiosos se puede representar mediante

$(\forall x) (A(x) \rightarrow E(x))$ donde el predicado A significa alumno, E estudioso y x es un elemento de un dominio general que podría ser el de las personas o cualquier subconjunto deseado. Por ejemplo podrían ser todos las personas que viven en los Reyes.

Aquí podemos ver claramente que el dominio juega un papel preponderante, ya que en un conjunto todos los alumnos podrían ser estudiosos y si cambiamos el conjunto puede ser que ya no sea verdad.

Todos los hombres son mortales se puede representar por $(\forall x) (H(x) \rightarrow M(x))$ donde H es hombre y M el predicado mortal.

Todos los pericos son verdes es: $(\forall x) (P(x) \rightarrow V(x))$ con P , perico y V verde.

A una expresión como las anteriores se le llama **Universal Afirmativa** y se representa con la letra **A**.

Los griegos utilizaban enunciados como los anteriores en los Silogismos, que son formas de razonamiento que contienen dos premisas tipo **A**, **E**, **I**, **O** y una conclusión también de uno de los cuatro tipos, las premisas están conectadas con un predicado común y la conclusión debe estar formado por las no comunes que se le llaman técnicamente premisa menor y premisa mayor.

Una expresión tipo **E** es llamada **Universal Negativa** y se representa por

$(\forall x) (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ y en español se lee ningún P cumple Q o sea que los que cumplen el predicado P(x) no cumplen el predicado Q(x).

Ningún alumno llegó tarde se puede representar por $(\forall x) (A(x) \rightarrow \neg T(x))$ donde A es alumno y T es llegó tarde.

Las dos expresiones restantes corresponden a casos particulares y para formarlas utilizamos el cuantificador existencial, y en lugar del operador condicional se usa la conjunción, así

I es $(\exists x) (P(x) \rightarrow Q(x))$ llamado **Particular Afirmativa** y

O es $(\exists x) (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ que es la **Particular Negativa**.

En el primer caso se indica un elemento que cumple las dos condiciones dadas por los predicados y en el segundo aseguramos que hay un elemento que cumple la primera condición pero no la segunda.

Una manera muy simple de combinar estas expresiones mediante una propiedad es utilizando la negación, pues dos de ellas son las negaciones de las otras dos, de ahí sus nombres de afirmativas y negativas.

Primeramente estableceremos dos reglas generales con un predicado simple:

Propiedad:

$\neg(\forall x) P(x)$ es equivalente a $(\exists x) (\neg P(x))$

$\neg(\forall x) P(x)$ es equivalente a $(\forall x) (\neg P(x))$

Ahora sí, podemos combinar estos dos resultados con las Universales y Particulares Afirmativas y Negativas y tenemos lo siguiente.

Teorema:

La negación de la **Universal Afirmativa** es la **Particular Negativa** y La negación de la **Particular Afirmativa** es la **Universal Negativa**.

O sea que la negación de la forma A es la forma O y la negación de la forma I es la forma E.

$\neg(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$ es equivalente a $(\exists x) (P(x) \wedge \neg Q(x))$

$\neg(\exists x) (P(x) \wedge Q(x))$ es equivalente a $(\forall x) (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

De una manera más simple lo que dice la primera fórmula es que la negación de **Todos** es **Alguno No** y que la negación de **Alguno** es **Ninguno**.

Esto es muy útil en matemáticas y en computación, por ejemplo si queremos demostrar que no es cierto que todas las funciones integrables son continuas, basta encontrar una que sea integrable y que no sea continua.

3.2.2 Representación y evaluación de Predicados

A diferencia de cálculo de proposiciones en cálculo de predicados utilizamos variables, dentro de este tema consideramos las expresiones booleanas que se definieron como proposiciones abiertas.

Concepto de Argumento y Tipos de Proposiciones Lógicas. En cálculo de predicados tenemos elementos más simples para formar las expresiones atómicas, a diferencia de una proposición simple donde su valor es verdadero o falso de acuerdo a una interpretación, en cálculo de predicados el valor de verdad depende de los componentes que forman el predicado. Por ejemplo:

Juan es padre de Pedro es una expresión en cálculo de predicados, que en general podría ser: x es padre de y , o simplemente $p(x, y)$.

En otras palabras tenemos aquí una proposición abierta que depende de dos variables, y que por supuesto el valor de verdad depende de los valores que le demos a las variables, porque por ejemplo: Luis es padre de Agustín puede tener un valor de verdad diferente al anterior.

En general podemos decir que un predicado puede tener una o más variables y que las variables pueden tomar valores de un conjunto específico llamado DOMINIO.

Así por ejemplo las dos expresiones mencionadas anteriormente son de la forma $p(x, y)$ donde el predicado p representa “es padre de” y el dominio es el conjunto de las personas.

Analiza cuáles son los predicados y las variables en los siguientes:

Ejemplos:

El libro es azul

Armando y Eduardo son hermanos

Jesús es alumno del tecnológico

El concierto de Aranjuez es una composición de Joaquín Rodrigo

Elías tiene más años que René en el trabajo

Esteban compra mercancía los lunes en Almacenes A.

Solución:

$AZ(x)$, AZ es el predicado: es de color azul, en el dominio de objetos.

$H(x,y)$, H es el predicado: es hermano de, el dominio el conjunto de las personas.

$T(x)$, T es el predicado: es alumno del Tecnológico, el dominio el conjunto de los estudiantes.

$R(x)$, r es el predicado: es composición de Joaquín Rodrigo, el dominio de las obras musicales.

$T(x,y)$, T es el predicado: tiene menos tiempo trabajando que, el dominio de las personas

$A(x,y)$, A es el predicado: comprar en los almacenes cierto día, el dominio para el primer argumento es el de las personas, el dominio del segundo son los días de la semana.

Podemos observar que la definición del predicado es arbitraria y que para un mismo ejemplo podría variar la estructura, por ejemplo en el predicado: El libro es azul, podríamos considerar como fórmula propuesta $M(x,y)$, donde M es el predicado: es de color, y el dominio para la primera variable es el conjunto de los objetos y para la segunda el de los colores.

También observamos que el dominio puede ajustarse según las necesidades, por ejemplo, en el tercer ejemplo en $T(x)$, x podría ser el conjunto de todos los alumnos de un país, o de una ciudad o de una disciplina.

3.3 Álgebra declarativa

Lo que algunos llaman álgebra declarativa no es otra cosa que el álgebra proposicional, o sea, la estructura algebraica que se forma con expresiones utilizando los conectivos lógicos.

Empezaremos por definir formalmente cómo se construye una fórmula en lógica. Una expresión sintácticamente correcta se le llama fórmula bien formada (fbf) o simplemente fórmula y su definición es:

Una fórmula en lógica de proposiciones se obtiene al aplicar una ó más veces las siguientes reglas:

(B) si p es una proposición lógica, es una fbf.

(R) si F es una fórmula bien formada (fbf) también lo es $(\neg F)$.

(R) si p, q son fbf entonces también lo es $(p * q)$ donde $*$ es uno de los operadores binarios, $\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$.

Nota: Cualquier expresión que no se pueda obtener mediante una aplicación finita de las reglas anteriores, no es una fórmula bien formada en lógica de proposiciones.

Para saber si una expresión en lógica es una fórmula bien formada construimos su árbol sintáctico aplicando recursivamente un árbol con una raíz y dos nodos para un conectivo lógico binario y un árbol con la raíz y un sólo nodo para la negación.

Si las hojas son proposiciones simples ó atómicas y cada rama es la aplicación de una regla recursiva (R) entonces es una fórmula bien formada (fbf).

Algoritmo para construir una tabla de verdad de una fórmula en lógica de proposiciones.

1. Escribir la fórmula con un número arriba de cada operador que indique su jerarquía. Se escriben los enteros positivos en orden, donde el número 1 corresponde al operador de mayor jerarquía. Cuando dos operadores tengan la misma jerarquía, se le asigna el número menor al de la izquierda.
2. Construir el árbol sintáctico empezando con la fórmula en la raíz y utilizando en cada caso el operador de menor jerarquía. O sea, del número mayor al menor.

Ejemplo 1. Compruebe que $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$ es una fórmula.

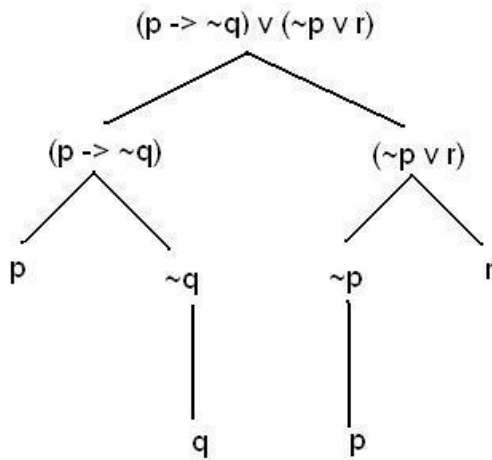
Solución:

i) Seguimos los pasos del algoritmo con la fórmula $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$

1. Vemos que los operadores de los paréntesis tienen mayor jerarquía, empezamos por el paréntesis izquierdo por lo que la fórmula con jerarquías marcadas sería:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 1 & & 5 & 3 & 4 \\ (& p & \rightarrow & \neg & q &) & \vee & (& \neg & p & \vee & r &) \end{array}$$

2. Construir el árbol Sintáctico empezando a descomponer por el operador con el número mayor, seguir en orden descendiente hasta el último que es el que tiene el número 1.



Ejemplo 2. Si tenemos las siguientes proposiciones

p: Hoy estudiaré matemáticas

q: Hoy iré al juego de básquetbol

r: Mañana iré al cine

s: Mañana tendré sesión extra de problemas

Entonces podemos formar las proposiciones compuestas

$p \wedge q$: Hoy estudiaré matemáticas e iré al juego de básquetbol

$q \vee r$: Hoy iré al juego de básquetbol ó mañana iré al cine

$(p \wedge q) \rightarrow r$: Si hoy estudio matemáticas y no voy al juego de básquetbol entonces mañana iré al cine

$q \wedge r$: Hoy no iré al juego de básquetbol ni mañana al cine

Representación en forma simbólica

Para representar una expresión del español en forma simbólica, se deben primeramente seleccionar los elementos atómicos, que son expresiones simples, y representar la expresión en términos de estos elementos utilizando operadores lógicos.

Ejemplo 5. Represente las siguientes expresiones del español utilizando operadores lógicos.

- i) Si voy al teatro ó me quedo estudiando en la biblioteca no llegaré temprano a casa.
- ii) Hoy llegaré temprano a casa ó si compro un libro estudiaré inglés.
- iii) Si resuelvo el problema entonces iré al juego de básquetbol o compro un libro.

Solución: Sean

p: voy al teatro

q: me quedo estudiando en la biblioteca

r: llegaré temprano a casa

s: compro un libro

t: estudio inglés

u: resuelvo el problema

w: iré al juego de básquetbol

las expresiones en forma simbólica quedan:

i) $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

ii) $r \vee (s \rightarrow t)$

iii) $u \rightarrow (w \vee s)$

Nota: Cabe aclarar que en español hay expresiones que pueden tener varias interpretaciones, el último ejemplo podría interpretarse también como $(u \rightarrow w) \vee s$.

Nota 2: Las fórmulas bien formadas son lo que en inglés le llamamos Well Form Formula y se abrevia: wff.

Un ejercicio muy importante es construir la definición de fórmula bien formada en cálculo de predicados, lo único que se debe hacer es agregar reglas para construir los cuantificadores existencial y universal; sin embargo hay que tener cuidado porque como las proposiciones son abiertas, las hojas en el árbol sintáctico o sea los términos atómicos no son letras simples sino predicados y se construyen con argumentos.

3.4 Inducción matemática

G. Peano (1858–1932) propuso cinco propiedades fundamentales que caracterizan a los números naturales, conocidos como Axiomas de Peano. Una de ellas conocida como el **Principio de Inducción Matemática** es actualmente una herramienta de uso práctico y teórico principalmente para matemáticos y personas que trabajan en Ciencias Computacionales.

El principio lo enunciaremos para los enteros positivos N^+ , pero bien se puede ampliar a los números naturales o a cualquier subconjunto de los enteros mayores o iguales a un entero fijo.

Principio de Inducción Matemática.

Si S es un conjunto de enteros positivos tal que

(B) $1 \in S$

(I) $k \in S \rightarrow (k+1) \in S$

entonces S contiene todos los enteros positivos.

En el principio de Inducción Matemática son muy importantes los nombres asociados y en la literatura técnica, como es costumbre, no se presenta con detalle los pasos, por lo que resulta indispensable conocer la nomenclatura.

Nomenclatura de Inducción Matemática.

(B) se llama **Caso Base** o caso inicial

(I) se llama **Paso de Inducción**

$k \in S$ se llama **Hipótesis de Inducción**

Y como ya se mencionó todo junto se llama **Principio de Inducción Matemática**.

Es importante que comprendas y memorices cada uno de estos conceptos y su participación directa en la propiedad.

Esencialmente lo que enuncia el principio de inducción matemática es, si logramos establecer que el primer entero positivo cumple, una propiedad, y si partiendo de que un entero arbitrario también la cumple, se puede comprobar que el entero siguiente también tiene la propiedad entonces concluimos que todos los enteros positivos tienen la propiedad indicada.

Por lo que **otra forma de enunciar el Principio de Inducción Matemática** es:

Si $F(n)$ es una proposición abierta que involucra enteros y se tiene (B) $F(1)$ es verdadera; o sea, se que cumple para $n=1$ (I) $F(k) \rightarrow F(k+1)$; Si se cumple para $n = k$ entonces también se cumple para $n=k+1$.

Concluimos que la proposición es verdadera para todos los enteros positivos.

El Principio de Inducción Matemática se utiliza para demostrar propiedades, formulas, validarlas y probar que son verdaderas, usualmente en el conjunto de los números enteros positivos. Muchas propiedades que incluyen la definición de factorial se pueden probar por Inducción Matemática, como el Teorema del Binomio de Newton, el Triángulo de Pascal y

algunas propiedades de combinatoria que involucran combinaciones y permutaciones. Otra forma de utilizarla es para proporcionar definiciones y formalizar conceptos.

1. Demostrar por Inducción Matemática que:

$$F(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Consideremos el conjunto S de los enteros para los cuales la propiedad es cierta.

- [B] Si $n=1$; tenemos: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1$$

entonces **1** está en **S** o sea que se cumple el caso base.

[M] Debemos de llegar a que para
 $n=k+1$ también se cumple:

$$1+2+3+\dots+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- [I] Inducción

- [H] Suponemos que cumple para $n=k$;

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- [H \rightarrow M] Sumamos $(k+1)$ de los dos lados de la igualdad

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por lo tanto, podemos concluir que la formula (1) es válida para todos los enteros positivos

Para realizar el Paso de Inducción se debe de partir del caso $n=k$ y llegar mediante pasos válidos al caso $n=k+1$.

En el ejemplo anterior para llegar a $n=k+1$ partiendo de $n=k$ al lado izquierdo sólo le faltaba $k+1$ por lo que la estrategia fue sumar $k+1$ en ambos lados de la igualdad.

En los ejemplos que se vean se debe considerar expresiones que se puedan resolver con la preparación de los estudiantes a los que va dirigido.

2. Demostrar por Inducción Matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (6n-2) = 4+10+16+\dots+(6n-2) = n(3n+1)$$

Σ Es la letra griega sigma mayúscula y en matemáticas significa suma

- [B] Si $n=1$; tenemos: $(6(1)-2) = 1(3(1)+1)$

$$4 = 4$$

entonces 1 está en S o sea que se cumple el caso base.

[M] Debemos de llegar a que para $n=k+1$ también se cumpla:

- [I] Inducción
 - [H] Suponemos que cumple para $n=k$;

$$4+10+16+\dots+(6k-2) = k(3k+1)$$

- [H→M] Sumando $(6(k+1)-2)$ a ambos lados

$$\begin{aligned} 4+10+16+\dots+(6k-2)+(6(k+1)-2) &= k(3k+1)+(6(k+1)-2) \\ &= 3k^2+k+6k+6-2 \\ &= 3k^2+7k+4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que la formula (2) es valida para cualquiera que sea el valor de n

El Principio de Inducción Matemática es mucho más que el algoritmo aquí presentado, ya que hay muchos casos en los que no aparecen igualdades algebraicas y como se mencionó en el principio inicialmente (B), (I) son tan generales que puede aplicarse a cualquier cosa que cumpla las condiciones. Sin embargo el poder aprender y resolver problemas con este algoritmo da la madurez necesaria para entenderlo en general y sirve también para formalizar y entender posteriormente la recursividad, concepto tan importante en Ciencias Computacionales.

Definiciones por inducción: Utilizando el método de Inducción Matemáticas podemos definir conceptos en forma recursiva, la ventaja es que se formalizan los conceptos además de que son más fáciles de manejar.

Factorial:

[B] $0! = 1$

[R] $(n+1)! = n! (n+1)$

Notación Sumatoria:

Suma:

[B] $m + 0 = m$

[R] $m + n' = (m+n)'$

La definición anterior se basa en los números naturales, n' significa el sucesor de n que equivale a $n+1$, por la misma definición anterior.

Producto:

[B] $m * 0 = 0$

[R] $m * (n+1) = (m * n) + m$

Lista de Ejercicios TESOEM

Clasifique las siguientes expresiones del idioma en proposiciones lógicas, proposiciones abiertas o expresiones indeterminadas.

1. Colón descubrió América en miércoles
2. $2 + 2 = 5$
3. Espérame un momento
4. Estudien mucho
5. $x + 1 < 4$

6. Estoy mintiendo
7. Todos los pericos son verdes
8. La mesa es de color rojo
9. Un ángulo recto mide 90 grados

Niegue las expresiones siguientes.

10. Algunos peces pueden nadar
11. El agua es transparente
12. México está en América
13. La mesa es azul
14. Todos los días hace calor
15. Ningún oso polar tiene frío
16. Algún sabio no toma café

Escriba las siguientes expresiones en forma simbólica

17. Hoy es lunes o mañana será sábado
18. Un número distinto de cero es positivo o negativo
19. Si no llueve iremos de día de campo
20. Se pueden estacionar alumnos y maestros
21. Si encuentra un producto mejor, comprelo
22. El no es rico ni feliz
23. Ser pobre es ser feliz
24. Hay que saber matemáticas para ser feliz

Escriba con palabras las siguientes expresiones simbólicas

25. $p \vee q$

p: llueve q: hay nubes

26. $p \rightarrow (q \vee r)$

p: mi carro falla q: me iré en taxi r: me iré en camión

27. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

p: compraré un cuaderno q: compraré un libro r: el maestro dicta la lección

$$28. (p \vee q) \leftrightarrow r$$

p: encuentro un cuaderno azul q: encuentro un cuaderno rojo r: compro un cuaderno

$$29. (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee s)$$

p: paso el examen q: me dejan tarea r: voy al cine s: voy de paseo

Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones

$$30. p \vee \neg q \vee r$$

$$31. (p \wedge \neg q) \rightarrow p$$

$$32. (p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$$

$$33. (\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg q)$$

$$34. ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

$$35. \neg(p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$$

$$36. (p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$$

Diga si las dos fórmulas dadas son equivalentes

$$37. \neg p \rightarrow (q \vee \neg r), q \vee (\neg p \rightarrow \neg r)$$

$$38. \neg \neg p, p$$

$$39. p \rightarrow q, \neg p \vee q$$

$$40. p \rightarrow q, \neg q \rightarrow \neg p$$

$$41. \neg(p \rightarrow q), p \wedge \neg q$$

$$42. \neg(p \wedge q), \neg p \vee \neg q$$

$$43. \neg(p \vee q), \neg p \wedge \neg q$$

$$44. p \vee (q \rightarrow r), p \vee \neg q \vee r$$

$$45. p \rightarrow (q \vee \neg r), \neg p \vee q \vee \neg r$$

$$46. (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r, \neg p \vee q \vee \neg r$$

$$47. \neg(p \rightarrow \neg q) \vee (q \rightarrow r), (p \wedge \neg r) \vee q$$

$$48. (\neg p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p), p \wedge \neg q \vee r$$

Compruebe que las siguientes fórmulas son tautologías

$$49. ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

$$50. p \vee \neg p$$

$$51. p \leftrightarrow p$$

$$52. (\neg p \wedge (\neg q \vee p)) \rightarrow \neg q$$

$$53. ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

$$54. (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow r$$

$$55. ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

56. Defina los términos: Tautología, falacia, equivalencia y argumento válido.

Compruebe los siguientes argumentos en forma directa

$$57. \neg p, \neg p \rightarrow r \quad \models r$$

$$58. \neg q, r \rightarrow q \quad \models \neg r$$

$$59. t, w \vee \neg t \quad \models w$$

$$60. p \rightarrow q, t \rightarrow \neg q, t \vee r, p \quad \models r$$

$$61. p, p \rightarrow \neg w, r \rightarrow w \quad \models \neg r$$

$$62. s \vee t, \neg t \rightarrow \neg q \quad \models \neg q$$

$$63. q \vee \neg t, t \vee \neg w, \neg q \quad \models \neg w$$

$$64. p, p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q, \neg r \rightarrow t \quad \models t$$

$$65. t, \neg t \vee s, s \rightarrow p, q \rightarrow \neg p \quad \models \neg q$$

$$66. p \vee q, r \rightarrow \neg p, r \quad \models q$$

$$67. \neg s \rightarrow \neg p, t \vee \neg s, t \rightarrow \neg w, p \quad \models \neg w$$

$$68. p \rightarrow q, \neg s \vee t, p \vee s \quad \models q \vee t$$

$$69. p \rightarrow (q \vee \neg r), p, \neg q \quad \models \neg r$$

$$70. t, q \rightarrow (p \vee \neg t), \neg q \rightarrow r, \neg r \quad \models p$$

corregir del 71 al 73

$$71. p \wedge \neg s, \neg p \vee t, w \rightarrow s \quad \models t \wedge \neg w$$

$$72. \neg p \vee q, q \rightarrow r, s \rightarrow \neg r, p \quad \models \neg s$$

$$73. \neg r \wedge t, (\neg w \wedge s) \rightarrow \neg t, w \rightarrow r \quad \models \neg s$$

Compruebe la validez de los siguientes argumentos utilizando una tabla en forma directa abreviada

$$74. p \rightarrow (q \vee \neg r), p, \neg q \quad \models \neg r$$

$$75. \neg w, r \rightarrow (w \vee s), r \quad \models s$$

$$76. p, \neg q, \neg q \rightarrow (\neg p \vee r) \quad \models r$$

$$77. (s \wedge \neg t) \rightarrow \neg p, p, \neg t \quad \models \neg s$$

$$78. (\neg q \wedge \neg r) \rightarrow t, \neg t, \neg q \quad \models r$$

Convierta los siguientes argumentos a fórmulas lógicas y después demuestre. Aplique reglas de inferencia

79. Un maestro dice: Si estudian aprobarán el examen. Y sabemos que Juan aprobó el examen, ¿qué podemos concluir?

80. Armando dice: Si no llueve y hace calor el domingo iré a la playa. Supongamos que no fue a la playa y no llovió. ¿Cuál es la conclusión?

81. Fernando dice: Si el libro cuesta menos de 200 pesos o tiene más de 50 páginas lo compraré. Si el libro no costaba más de 200 pesos y no lo compró, ¿Cuál es la conclusión?

82. Si no hay clase de Inglés iré al cine o de compras. Si sabemos que no hubo clase de Inglés y no se fue de compras, ¿Qué podemos concluir?

83. Pedro dice: Si hoy en la noche estudio nos veremos en la fiesta. Si lo vemos en la fiesta, ¿qué podemos concluir?

84. Describa el algoritmo para realizar una demostración por inducción en una igualdad que involucre enteros y donde la parte izquierda es una suma.

Demuestre por inducción matemática

$$85. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$86. \quad 6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n+1)$$

$$87. \quad 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$$

$$88. \quad 7 + 13 + 19 + \dots + (6n+1) = n(3n+4)$$

$$89. \quad 5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$$

$$90. \quad 1 + 6 + 11 + \dots + (5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$91. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

$$92. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Demuestre

93. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4. ALGEBRA BOOLEANA

El álgebra booleana es un sistema matemático deductivo centrado en los valores cero y uno (falso y verdadero). Un operador binario “ \circ ” definido en éste juego de valores acepta un par de entradas y produce un solo valor booleano, por ejemplo, el operador booleano AND acepta dos entradas booleanas y produce una sola salida booleana. Para cualquier sistema algebraico existen una serie de postulados iniciales, de aquí se pueden deducir reglas adicionales, teoremas y otras propiedades del sistema,

4.1 Teoremas y postulados.

Cerrado. El sistema booleano se considera cerrado con respecto a un operador binario si para cada par de valores booleanos se produce un solo resultado booleano.

Conmutativo. Se dice que un operador binario “ \circ ” es conmutativo si $A \circ B = B \circ A$ para todos los posibles valores de A y B.

Asociativo. Se dice que un operador binario “ \circ ” es asociativo si $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ para todos los valores booleanos A, B, y C.

Distributivo. Dos operadores binarios “ \circ ” y “ $\%$ ” son distributivos si $A \circ (B \% C) = (A \circ B) \% (A \circ C)$ para todos los valores booleanos A, B, y C.

Identidad. Un valor booleano I se dice que es un elemento de identidad con respecto a un operador binario “ \circ ” si $A \circ I = A$.

Inverso. Un valor booleano I es un elemento inverso con respecto a un operador booleano “ \circ ” si $A \circ I = B$, y B es diferente de A, es decir, B es el valor opuesto de A.

Para nuestros propósitos basaremos el álgebra booleana en el siguiente juego de operadores y valores: - Los dos posibles valores en el sistema booleano son cero y uno, a menudo llamaremos a éstos valores respectivamente como falso y verdadero. El símbolo \cdot representa la operación lógica AND. Cuando se utilicen nombres de variables de una sola letra se eliminará el símbolo \cdot , por lo tanto AB representa la operación lógica AND entre las variables A y B, a esto

también le llamamos el producto entre A y B. - El símbolo “+” representa la operación lógica OR, decimos que $A + B$ es la operación lógica OR entre A y B, también llamada la suma de A y B. El complemento lógico, negación ó NOT es un operador unitario, en éste texto utilizaremos el símbolo “ \neg ” para denotar la negación lógica, por ejemplo, $\neg A$ denota la operación lógica NOT de A.

Si varios operadores diferentes aparecen en una sola expresión booleana, el resultado de la expresión depende de la procedencia de los operadores, la cual es de mayor a menor, paréntesis, operador lógico NOT, operador lógico AND y operador lógico OR. Tanto el operador lógico AND como el OR son asociativos por la izquierda. Si dos operadores con la misma procedencia están adyacentes, entonces se evalúan de izquierda a derecha. El operador lógico NOT es asociativo por la derecha. Utilizaremos además los siguientes postulados:

P1 El álgebra booleana es cerrada bajo las operaciones AND, OR y NOT

P2 El elemento de identidad con respecto a \cdot es uno y con respecto a $+$ es cero. No existe elemento de identidad para el operador NOT

P3 Los operadores $*$ y $+$ son conmutativos.

P4 $*$ y $+$ son distributivos uno con respecto al otro, esto es, $A*(B+C) = (A*B)+(A*C)$ y $A+(B*C) = (A+B)*(A+C)$.

P5 Para cada valor A existe un valor $\neg A$ tal que $A*\neg A = 0$ y $A+\neg A = 1$. Éste valor es el complemento lógico de A.

P6 $*$ y $+$ son ambos asociativos, esto es, $(AB)C = A(BC)$ y $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Es posible probar todos los teoremas del álgebra booleana utilizando éstos postulados, además es buena idea familiarizarse con algunos de los teoremas más importantes

Hemos dicho que los *circuitos digitales* trabajan con números, y que estos números se expresan en *binario*. Veremos más adelante cómo **con un conjunto de ecuaciones podemos describir lo que hace un circuito**, que transforma los números de la entrada y por otros que

obtenemos en la salida. Sin embargo, puesto que estos números vienen expresados en binario, **las variables y números utilizados NO SON REALES.**

Para describir un circuito digital utilizaremos ecuaciones

Para describir un circuito digital utilizaremos ecuaciones matemáticas. Sin embargo, estas ecuaciones tienen variables y números que NO SON REALES, por lo que NO podemos aplicar las mismas propiedades y operaciones que conocemos. Hay que utilizar nuevas operaciones y nuevas propiedades, definidas en el ALGEBRA DE BOOLE.

Por tanto, vamos a trabajar con unas ecuaciones a las que **NO estamos acostumbrados.** Son muy sencillas, pero al principio pueden resultar poco intuitivas. En este capítulo aprenderemos a trabajar con ellas.

Las operaciones del Álgebra de Boole

En el *Álgebra de Boole* hay dos operaciones, denotadas con los símbolos $+$ y $*$ pero que *¡no tienen nada que ver con las operaciones que todos conocemos de suma y producto!!*. ¡¡No hay que confundirlas!!!!. El $+$ y el $*$ del *Algebra de Boole* se aplican a **bits**, es decir, a números que sólo pueden ser el '0' ó el '1'.

La operación $+$

Esta operación se define de la siguiente manera:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

Las tres primeras operaciones nos resultan obvias, son iguales que la suma que conocemos, sin embargo la expresión $1 + 1 = 1$ nos puede resultar chocante. ¿¿*Pero no me habían dicho toda la vida que $1+1=2$??*, nos podemos estar preguntando. Sí, pero hay que recordar que aquí estamos utilizando otra operación que **NO ES LA SUMA**, la denotamos con el mismo símbolo '+', **¡pero no es una suma normal!!** ¡¡Hay que cambiar el “chip”!! ¡¡Ahora estamos con Algebra de Boole!!

Pasado el pánico inicial, si nos fijamos en esta nueva operación, notamos lo siguiente: **El resultado siempre es igual a '1' cuando alguno de los bits sumandos es igual a '1'**. O lo que es lo mismo, **El resultado de esta suma sólo da '0' si los dos bits que estamos sumando son iguales a cero**. En caso contrario valdrá '1'.

¿Y para qué nos sirve esta operación tan extraña? Veamos un ejemplo. Imaginemos que hay una sala grande a la que se puede acceder a través de dos puertas. En el techo hay una única lámpara y existen dos interruptores de luz, uno al lado de cada puerta de entrada. Como es lógico, *la luz se enciende cuando algunos de los dos interruptores (o los dos) se activan*. Esto lo podemos expresar mediante una *ecuación booleana*. Para denotar el estado de uno de los interruptores utilizaremos la **variable booleana A**, que puede valor '0' (Interruptor apagado) ó '1' (interruptor activado). Para el otro interruptor usaremos la **variable B**. Y para el estado de la luz, '0' (apagada) y '1' encendida, usaremos la **variable F**.

El estado en el que se encuentra la luz, en función de cómo estén los interruptores **viene dado por la ecuación booleana**:

$F = A + B$ que indica que $F=1$ (Luz encendida) si alguno de los interruptores está a '1' (activado).

Ya lo veremos más adelante, pero podemos ir adelantando unas propiedades muy interesantes.

Si **A** es una variable booleana, se cumple:

$$A + A = A$$

$$1 + A = 1$$

$$0 + A = A$$

La operación *

Esta operación se define así:

$$0 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 0 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

En este caso, la operación es más *intuitiva*, puesto que es **igual que el producto de números Reales**. Si nos fijamos, vemos que **el resultado sólo vale '1' cuando los dos bits están a '1'**, o visto de otra manera, **el resultado es '0' cuando alguno de los dos bits es '0'**.

Vamos a ver un ejemplo. Imaginemos una caja de seguridad de un banco que sólo se abre cuando se han introducido dos llaves diferentes, una la tiene el director y la otra el jefe de seguridad. Si sólo se introduce una de ellas, la caja no se abrirá. Modelaremos el problema así.

Utilizaremos la **variable A** para referirnos a una de las llaves ('0' no introducida, '1' introducida) y la **variable B** para la otra llave. Con la **variable F** expresamos el estado de la caja de seguridad ('0' cerrada y '1' abierta). El estado de la caja lo podemos expresar con la ecuación: $F = A * B$ que indica que la caja se abrirá ($F=1$) sólo si $A=1$ (una llave introducida) y $B=1$ (la otra llave introducida). En cualquier otro caso, $F=0$, y por tanto la caja no se abrirá.

Podemos ir adelantando algunas propiedades de esta operación:

$$A * A = A$$

$$A * 0 = 0$$

$$A * 1 = A$$

La negación

La operación de negación nos permite obtener el estado complementario del bit o variable booleana al que se lo aplicamos. Se define de la siguiente manera:

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

Es decir, que si se lo aplicamos a '0' obtenemos '1' y si se lo aplicamos al '1' obtenemos '0'. Esta operación nos permite cambiar el estado de una variable booleana. Si **A** es una variable booleana, \bar{A} tiene el estado contrario.

Las propiedades del Álgebra de Boole

Las operaciones del *Álgebra de Boole* las podemos definir utilizando *tablas de verdad*:

Operación +

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operación *

A	B	A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Las **propiedades** del *Algebra de Boole* son las siguientes:

1. Las operaciones + y * son CONMUTATIVAS

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

2. Elemento Neutro

$$A + 0 = A$$

$$A * 1 = A$$

3. Distributiva

$$A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$$

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$$

4. Elemento inverso

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A * \bar{A} = 0$$

Operación de **negación** definida por:

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Ejercicios:

Para practicar e ir cogiendo soltura con el *Algebra de Boole* se recomienda hacer los siguientes **ejercicios**.

a) $1 + 0 =$

j) $1 + 1 =$

b) $1 * 0 =$

k) $1 * 1 =$

c) $A + 0 =$

l) $A + 1 =$

d) $A * 1 =$

m) $A * 0 =$

e) $A + A =$

n) $A * A =$

f) $A + \bar{A} =$

ñ) $A * \bar{A} =$

g) $A + AB =$

o) $A (A + B) =$

h) $A + AB + B =$

Teoremas importantes

Derivados de las propiedades fundamentales, existen una serie de *Teoremas* muy interesantes e importantes que usaremos a lo largo de todo el curso. Algunos los utilizaremos en la teoría y otros para los problemas.

Asociatividad

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\mathbf{A * B * C = (A * B) * C = A * (B * C)}$$

Idempotencia:

$$\mathbf{B + B = B}$$

$$\mathbf{B * B = B}$$

Ley de Absorción

$$\mathbf{A + A*B = A}$$

$$\mathbf{A*(A + B) = A}$$

Este teorema es muy importante puesto que nos permite realizar simplificaciones en las expresiones.

Leyes de DeMorgan

$$\overline{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \cdot \dots \cdot \overline{B_n}$$

$$\overline{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \dots \cdot B_n} = \overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3} + \dots + \overline{B_n}$$

Este teorema es también muy importante y lo usaremos constantemente. Vamos a hacer algunos ejemplos para aprender a utilizarlo:

- **Ejemplo 1:** $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- **Ejemplo 2:** $\overline{A \cdot B + C \cdot D} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{C \cdot D} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D})$
- **Ejemplo 3:** $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
- **Ejemplo 4:** $\overline{A \cdot B + C} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{C} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C} = (\overline{A} + B) \cdot C$

Teorema de Shannon:

$$\overline{F(B_1, B_2, \dots, B_n, +, \cdot)} = F(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \dots, \overline{B_n}, \cdot, +)$$

Este teorema es una generalización de las leyes de DeMorgan. Lo que nos dice es que si tenemos cualquier expresión booleana negada, es igual a la misma expresión en la que todas las variables estén negadas y en la que se sustituyan las operaciones $+$ por \cdot y viceversa.

Veamos algunos ejemplos:

• **Ejemplo 5:** $\overline{(B_1 + B_2) \cdot B_3} = (\overline{B_1} \cdot \overline{B_2}) + \overline{B_3}$

En este ejemplo se podrían haber aplicado las leyes de DeMorgan sucesivas veces, como hemos hecho en ejemplos anteriores, sin embargo podemos aplicar el *Teorema de Shannon*.

• **Ejemplo 6:** $\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{C}} = (\overline{A} + B) \cdot C$

• **Ejemplo 7:** $\overline{A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} = \overline{A} + B + C$

Teorema de expansión:

$$F(B_1, \dots, B_n) = B_1 \cdot F(1, B_2, \dots, B_n) + \overline{B_1} \cdot F(0, B_2, \dots, B_n)$$

$$F(B_1, \dots, B_n) = [B_1 + F(0, B_2, \dots, B_n)] \cdot [\overline{B_1} + F(1, B_2, \dots, B_n)]$$

Este teorema es más teórico y no tiene aplicación directa en los problemas.

Ejercicios:

Aplicar las leyes de Morgan en los siguientes casos:

1. $\overline{A(B + C)} =$

2. $\overline{\overline{AB} + \overline{CD} \cdot E} =$

3. $\overline{(AB + CD) \cdot E} =$

Hasta ahora hemos visto en qué operaciones se basa el Algebra de Boole y algunas de sus propiedades. Para aprender a trabajar con este nuevo tipo de expresiones booleanas es necesario practicar, por eso se recomienda que se hagan los ejercicios propuestos.

Funciones reales y funciones booleanas

Utilizando *expresiones booleanas*, vamos a definir **Funciones booleanas**, que son exactamente iguales a las funciones matemáticas a las que estamos habituados pero con la particularidad de que **las variables son booleanas** y que **los valores devueltos por la función también son booleanos**, es decir, **una función booleana sólo puede tomar los valores '0' ó '1'**.

Como hemos hecho antes, vamos a ver un ejemplo utilizando una función matemática de las que todos conocemos. Por ejemplo esta:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Se trata de una *función Real* que tiene una *variable Real* (x). Para cada valor de x , obtenemos el valor de la función. Así por ejemplo podemos calcular los siguiente:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 5$
- $f(3) = 10$

Como es una **función Real**, obtenemos como valores de la función **Números Reales**.

También podemos definir funciones reales de 2 ó más variables, como por ejemplo:

- $f(x, y) = x*y + 3$ **Función de 2 variables**
- $g(x, y, z) = x*y + z$ **Función de 3 variables**

Como estamos acostumbrados a trabajar con este tipo de funciones, nos resultan sencillas. Ahora vamos a definir **funciones booleanas**. Para ello hay que tener en mente que trabajaremos con variables booleanas y que por tanto usaremos las operaciones $+$ y $*$ del **Algebra de Boole**, y que como ya sabemos, nada tienen que ver con las operaciones suma y producto a las que estamos habituados.

Por ejemplo, sea la siguiente **función booleana de una variable** :

$$F(A) = \bar{A}$$

El valor devuelto por la función es el negado del que se le pasa por la variable. Como la variable A es booleana, sólo puede tomar los valores '0' y '1'. Los que la función F toma son:

$$F(0) = \bar{0} = 1$$

$$F(1) = \bar{1} = 0$$

Vamos a definir una función un poco más compleja, usando dos variables booleanas, A y B:

$$F(A, B) = (A + B) * \bar{B}$$

¿Cuándo vale F(0,0)? sólo hay que sustituir en la función los valores de A y B por '0', obteniéndose:

$$F(0, 0) = (0 + 0) * \bar{0} = 0 * 1 = 0$$

Calcularemos el valor de F para el resto de valores de entrada de A y B:

$$F(0, 1) = (0 + 1) * \bar{1} = 1 * 0 = 0$$

$$F(1, 0) = (1 + 0) * \bar{0} = 1 * 1 = 1$$

$$F(1, 1) = (1 + 1) * \bar{1} = 1 * 0 = 0 \text{ Se deja como ejercicio para practicar}$$

(La solución es 0).

Fijándonos en esta función tan sencilla, podemos darnos cuenta de varias cosas:

1. Puesto que las variables de entrada A y B, sólo pueden tomar los valores '0' y '1', hay 4 casos distintos:

$$a) A = 0, B = 0 \Rightarrow F(0, 0) = 0$$

$$b) A = 0, B = 1 \Rightarrow F(0, 1) = 0$$

$$c) A = 1, B = 0 \Rightarrow F(1, 0) = 1$$

$$d) A = 1, B = 1 \Rightarrow F(1, 1) = 0$$

2. Antes de calcular los valores que toma la función, según lo que valgan A y B, se pueden aplicar algunas propiedades para obtener una **función más simplificada**.

$$F(A, B) = (A + B) * \bar{B} = \{\text{Aplicando la propiedad distributiva}\} = A * \bar{B} + B * \bar{B} = A * \bar{B}$$

Es más sencillo trabajar con esta función simplificada: $F(A, B) = A * \bar{B}$

Las funciones booleanas pueden ser de muchas más variables, como en los siguientes ejemplos:

$$F(x, y, z) = x * y + z. \quad \text{Función booleana de 3 variables}$$

$$F(A, B, C, D) = \bar{A} * B + C * \bar{D} \quad \text{Función booleana de 4 variables}$$

$$F(E_4, E_3, E_2, E_1, E_0) = \bar{E}_4 * \bar{E}_3 * E_2 * E_1 * \bar{E}_0 \quad \text{Función booleana de 5 variables}$$

Por cuestiones de comodidad, muchas veces no escribimos entre paréntesis las variables de la función, así por ejemplo podemos definir una **función de 3 variables** de la siguiente manera: $F = \bar{A} * B + \bar{C}$

Realiza los siguientes ejercicios:

Obtener el valor de las siguientes funciones booleanas, en todos los casos.

1. $F = A + B$

2. $F = A + \bar{B}$

3. $F = \bar{A} * B + C$

4.2 Aplicación del algebra booleana (Compuertas lógicas)

Un concepto muy útil en computación es el de diagramas de compuertas lógicas, empezaremos por la más sencilla.

Definición. Un compuerta tipo y (AND) de dos variables a, b se representa por $a \wedge b$ ó $a \times b$ ó $a \cdot b$ y regresa 1 cuando los dos valores de a y b son 1.

$$a \wedge b = a \times b = a \cdot b$$

Tablas:

a	b	$a \wedge b$	\times	0	1
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0			
0	0	0			

Definición. Una compuerta tipo ó (OR) de dos variables a, b se representa por $a \vee b$ ó $a + b$ y regresa 1 cuando por lo menos alguno de a ó b es 1.

$$a \vee b = a + b$$

Tablas:

a	b	$a \vee b$	+	0	1
1	1	1			
1	0	1	0	0	1
0	1	1			
0	0	0	1	1	1

Definición. Una compuerta muy importante es la tipo no (NOT) ó inversor representada por a, regresa 0 cuando la entrada es 1 y 1 cuando la entrada es 0.

Algoritmo.

Para encontrar la expresión booleana correspondiente a un diagrama de compuertas lógicas se forma un árbol sintáctico invertido, las variables simples son las hojas y se forman las ramas de acuerdo a las siguientes reglas:

i) Si f es la entrada a un inversor, f es el padre de f .

ii) Si f_1, f_2 son las entradas de una compuerta y (AND) $f_1 \vee f_2$ (también puede ser $f_1 * f_2$) es el padre de f_1 , y f_2 .

iii) Si f_1, f_2 son la entrada de una de compuerta ó (OR) $f_1 \vee f_2$ ($f_1 + f_2$) es el padre de f_1, f_2 .

También podemos analizar el problema contrario. Dada una expresión booleana construir el circuito de compuertas. Primero construimos el árbol sintáctico. Después ponemos una línea para cada variable distinta en las hojas y construimos en forma recursiva de las hojas a la raíz dibujando por cada rama:

i) un inversor NOT con entrada f si aparece f .

ii) una compuerta AND con entradas f_1, f_2 si aparece $f_1 \wedge f_2$

iii) una compuerta OR con entradas f_1, f_2 si aparece $f_1 \vee f_2$

El concepto de expresión booleana se puede formalizar:

Definición: Expresión Booleana. (B) $0, 1, a, b, c, \dots$ son expresiones booleanas.

(R) Si A, B son expresiones $\emptyset A, A \vee B, A \wedge B$ también lo son.

En la práctica se evalúan las compuertas con una serie de “datos” ó valores de entrada, que pueden ser por ejemplo bytes. En este caso, la salida sigue las mismas reglas, evaluando bit por bit.

Ejemplo: Evalúe la expresión booleana del primer ejemplo con:

$a = 00110011$

$$b = 10101010$$

$$c = 10011001$$

$$\text{primeramente } b = 01010101 \quad b \wedge c = 00010001 \quad a \vee (b \wedge c) = 00110011$$

Propiedades de los circuitos:

Teorema: Sean \emptyset , \vee , \wedge los operadores definidos previamente, entonces.

(a) Leyes asociativa:

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(b) Leyes conmutativas:

$$a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$$

(c) Leyes distributivas:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

(d) Leyes de elementos neutros:

$$a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a$$

(e) Leyes de complementos:

$$a \vee a = 1, a \wedge a = 0$$

(f) Leyes de DeMorgan:

$$a \vee b = a \wedge b, a \wedge b = a \vee b$$

Demostración. La demostración de cualquiera de estas propiedades se puede hacer construyendo una tabla de verdad y comprobando que son equivalentes.

En general dos fórmulas con las mismas variables son equivalentes si tienen la misma tabla.

Definición. Dos circuitos combinatorios son equivalentes si dados x_1, \dots, x_n como datos de entrada producen los mismos datos de salida.

En lógica de circuitos combinatorios se utilizan también algunos otros operadores.

Algunos otros operadores:

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$	$x_1 - x_2$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

XOR NAND NOR

Ejemplo: Diseñe un circuito que calcule XOR

$$x_1 + x_2 = (x_1 \bar{x}_2) \cup (x_1 x_2)$$

x_1

x_2

x	y	$x + y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4.2.1 Propiedades de los Circuitos Combinatorios

Definición. Una algebra booleana es $B = (S, +, *, -, 0, 1)$ con 0 y 1 $\in S$ tal que

(a) Leyes asociativas

$$(x+y) + z = x + (y+z), (x * y) * z = x * (y * z)$$

(b) Leyes conmutativas

$$x+y = y+x, \quad x * y = y * x$$

(c) Leyes distributivas

$$x*(y+z) = x*y + x * z, \quad x+(y*z) = (x + y) * (x + z)$$

(d) Elementos neutros

$$x+0 = x, \quad x * 1 = x$$

(e) Ley de complementos

$$x + \bar{x} = 1, \quad x * x = 0$$

Ejemplos:

$(Z_2, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ es un algebra Booleana, donde el conjunto $Z_2 = \{0,1\}$

$(P(U), \cap, \cup, \chi, \phi, U)$ es un algebra Booleana, $P(U)$ contiene a todos los subconjuntos de un universo U . $(\mathbb{P}, \wedge, \vee, \emptyset, \text{false}, \text{true})$ es un algebra Booleana.

Teorema:

(a) Leyes de Idempotencia

$$x + x = x, \quad x * x = x$$

(b) Leyes de Acotamiento

$$x+1 = 1, \quad x * 0 = 0$$

(c) Leyes de Absorción

$$x + x*y = x, \quad x*(x + y) = x$$

(d) Ley de Involución

$$(\bar{\bar{x}}) = x,$$

(e) Leyes recíprocas de los complementos

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$$

(f) Leyes De Morgan

$$\overline{x + y} = x * y, \quad \overline{x * y} = x + y$$

Definición. El dual de una expresión booleana se obtiene intercambiando $+$ con $*$ y también 0 con 1 .

Ejemplo: $\overline{x + y} = x * y$

La expresión dual es

$$\overline{x * y} = x + y$$

Teorema: Si dos expresiones booleanas son iguales, la igualdad también se cumple con sus respectivas expresiones duales.

NOTA: Cuando se demuestra que dos expresiones son iguales. La misma demostración tomando en cada paso expresiones duales comprueba el teorema dual, a esto se le llama demostración dual.

4.2.2 Funciones lógicas

El tema de funciones lógicas o más correctamente funciones booleanas es muy útil en computación, nos sirven para representar las relaciones de entrada (INPUT) y salida (OUTPUT) para valores arbitrarios.

El tema es muy general y uno de sus usos es el de formar diagramas que obtengan valores de salida (OUTPUT) para los valores de entrada (INPUT). empezaremos por ver el concepto.

Definición: Una función cuyo dominio está en el producto cartesiano de bits $\mathbf{B} = \{0,1\}$ y su un subconjunto de $\mathbf{B} = \{0,1\}$ se llama **función booleana**.

Esto es, el dominio son tuplos (x_1, x_2, \dots, x_n) donde cada x_i es 1 o 0, y los valores asignados son 1 o 0.

Por ejemplo si $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una expresión booleana, una función booleana f es de la forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ejemplo: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ o también representada como $x_1 (x_2 + x_3)$

También podemos construir una expresión en base a una función dada por su tabla.

Ejemplo:

X1	X2	X3	f(X1,X2,X3)
1	1	1	1
1	1	0	0

1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

La idea se centra en el hecho de que el operador AND tiene como resultado el valor 1 si y sólo si todos los valores de entrada son 1, por lo que formamos expresiones con las variables X_i y sus complementos $\overline{X_i}$ para obtener cada uno de los 1's que aparecen en la tabla. Finalmente tomamos la disyunción de todas las conjunciones y obtenemos la fórmula deseada.

en el ejemplo el resultado será $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 + X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} + \overline{X_1} X_2 \overline{X_3}$

A la expresión $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ se le llama mintérmino donde cada Y_i es X_i ó $\overline{X_i}$

También se puede formar la expresión fijándonos en los ceros y obtener una conjunción de disyunciones. Esta forma se llama forma normal conjuntiva y se deja como ejercicio. La forma de conjunción de disyunciones se llama forma normal disyuntiva y es muy útil en programación lógica; es, por ejemplo, la base para el lenguaje Prolog.

4.3 Aplicación del álgebra booleana.

Combinando lo de funciones lineales con las propiedades de un álgebra booleana podemos aplicarlo en la simplificación de circuitos lógicos.

Ejemplo, si queremos encontrar un diagrama de un circuito que los valores de una función cualquiera dada, podemos aplicar el método de la sección anterior. Sin embargo la fórmula puede tener un número grande de operadores por lo que el diagrama resultante tendría muchas compuertas, podemos reducir la expresión utilizando propiedades de álgebra booleana y después hacer el diagrama y obtenemos en muchos casos una reducción considerable de compuertas lógicas.

Ejemplo: Como Funciona Un Ciclo

Para explicar cómo funciona un ciclo de forma fácil tomaremos como ejemplo los ciclos o estructuras de repetición “FOR” de programación bajo el lenguaje C++:

La estructura de repetición “FOR” maneja todos los detalles controlada por un contador en este caso utilizaremos la variable “a” como contador y variable de control en la estructura.

Cuando se comienza la ejecución de la estructura “FOR” la variable de control “contador” (a) se declara e inicializa en 1 con la siguiente instrucción “a=1” o “contador =1”, entonces se evalúa la condición de continuidad del ciclo.

“a<=10” o “contador<=10” por medio de esta declaración le estamos señalando a la estructura cuantos ciclos o hasta que numero queremos que avance el ciclo, esta expresión podríamos interpretarla de la siguiente manera: queremos que la estructura de repetición alcance un número menor o igual a 10 repeticiones o ciclos. Con la expresión “a++” o “contador ++” incrementa la variable de control “a” o “contador” y el ciclo comienza de nuevo con esta condición de continuidad del ciclo, ahora la variable de control “a” o “contador” es igual a 2, así no se ha excedido el valor final y el programa realiza de nuevo la instrucción del cuerpo. Este proceso continua hasta que la variable de control “a” o “contador” se incrementa a 11, esto ocasiona que la condición de continuidad del ciclo (a<=10) falle y termine la repetición y así el programa compilador continua con la siguiente instrucción después de la estructura de repetición o ciclo.

Para un mejor entendimiento analicemos la siguiente estructura de repetición paso a paso:

Paso 1: For (int a=1;a<=10;a++) : Aquí la palabra FOR es reservada por el compilador para indicar el comienzo de una estructura de repetición tipo “FOR”, dentro del paréntesis int a=1 inicializa la variable de control con “int” indicando que es una variable de números enteros, a=1 nos indica que la variable de control se inicializa en 1;

a<=10 de esta forma estamos indicando que queremos que la variable de control “a” sea menor de 10 o igual a 10 en pocas palabras que la iteraciones del ciclo no sobrepasen 10; con “a++” estamos señalando que queremos que cada repetición o ciclo se le vaya aumentando un valor a la variable de control. Y así es la forma en que le señalamos toda una estructura de repetición a el compilador tal cual la queremos que actúe, ya el compilador de forma automática realizara todas las repeticiones o ciclos de la estructura.

Ese fue el primer paso de la estructura y el único que debemos realizar dentro de un compilador ya que todos los siguientes pasos los realiza de forma automática

Paso 2: como el compilador recibe el paso 1 como instrucción y las demás iteraciones del ciclo las realiza automáticamente solo utilizaremos estos pasos como referencia de que es lo que realiza el compilador cada iteración del ciclo con las instrucciones que le dimos. For (a=2;a<=10;a++) En este paso la variable de control aumento un valor tal cual como le señalamos que lo hiciera al darle la instrucción “a++” y aun el valor de la variable de control sigue siendo menor que 10 asi que le da derecho de pasar a la siguiente iteración del ciclo

Paso 3: For (a=3;a<=10;a++) igual que en el paso 2 solo aumenta un valor la variable de control por que con “a++” le estamos indicando que solo aumente un valor cada iteración, prosigue a la siguiente iteración ya que el valor de la variable de control sigue siendo menor que 10

Paso 4: For(a=4;a<=10;a++) igual que en el paso anterior solo aumento un valor la variable de control y sigue siendo menor a 10 asi que continua hacia la siguiente iteración del ciclo.

Paso 5: For (a=5;a<=10;a++) una vez mas solo aumenta un valor la variable de control y sigue siendo menor que 10 pasamos a la siguiente iteración.

Paso 6: For (a=6;a<=10;a++) aumenta un valor la variable de control y sigue siendo menor a 10

Paso 7: For (a=7;a<=10;a++) aumenta un valor la variable de control y sigue siendo menor a 10

Paso 8: For (a=8;a<=10;a++) aumenta un valor la variable de control y sigue siendo menor a 10

Paso 9: For (a=9;a<=10;a++) aumenta un valor la variable de control y sigue siendo menor a 10

Paso 10: For (a=10;a<=10;a++) Aumenta nuevamente un valor la variable de control, esta vez siendo 10 el valor de la variable la estructura respeta la condición de continuidad “a<=10” y finaliza el ciclo o estructura de repetición avanzando a la siguiente instrucción del programa en la siguiente línea.

5. RELACIONES

5.1 Conceptos básicos.

Las relaciones son muy importantes en matemáticas y sobretodo en computación, pues vienen a ser una herramienta fundamental en Bases de Datos, Programación, etc.; casi en cualquier tópico de una u otra forma se utiliza el concepto de relación. El término relación es muy amplio y se puede conceptualizar en términos muy generales, pero la idea central es muy simple y entendiendo el concepto se puede aplicar en cualquier situación por diversa que sea.

Una relación es una asociación entre elementos u objetos, generalmente de dos conjuntos arbitrarios. Una manera de formalizar el concepto y al mismo tiempo hacerlo práctico para usarse en computación es considerar una relación como un conjunto de pares ordenados. Esto se puede extender posteriormente a tuplos para definir relaciones de varios elementos.

Primeramente empezaremos por el concepto de producto cartesiano entre Conjuntosⁱ.

A diferencia de un conjunto en un par ordenado (a,b) ⁱⁱ, importa el orden de los elementos. Si se consideran los conjuntos A y B y formamos parejas o pares ordenados con los elementos de A como primeros elementos y los de B como segundos, se obtiene un conjunto llamado **producto cartesiano**. Esto es:

Definición. $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Ejemplo: $A = \{1,2,5\}$, $B = \{2,3\}$

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(5,2),(5,3)\}$

Con el producto cartesiano podemos establecer la definición formal de relación.

Definición. Una **relación** R de A a B es un subconjunto de $A \times B$. Los elementos de A que aparecen en la relación forman el dominio y los de B forman el rango.

Notación: $R \subseteq A \times B$

$\text{DOM}(R) = \{x : (x,y) \in R\}$

$\text{RAN}(R) = \{y : (x,y) \in R\}$

O sea que una relación de A a B es un conjunto de pares ordenado, donde los primeros elementos pertenecen al conjunto A y los segundos a B.

Definición. La relación inversa R^{-1} de una relación R de A a B es la que se obtiene si invertimos el orden en las parejas.

$$R^{-1} = \{ (y, x) : (x, y) \in R \}$$

Observamos que la relación inversa es una relación de B a A .

Ejemplos.

Si $A = \{a, b, c, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R_1 = \{(a, 2), (c, 2), (x, 1), (y, 5), (z, 5)\}$$

$$R_2 = \{(a, 1), (a, 5), (c, 3), (x, 2), (x, 4)\}$$

$$R_3 = \{(a, 4), (b, 2), (c, 5), (x, 1)\}$$

$$R_4 = \{(a, 3), ((b, 1), (b, 5), (c, 3), ((c, 5), (x, 1), (y, 4)\}$$

$$DOM(R_1) = \{a, c, x, y, z\}$$

$$RAN(R_1) = \{1, 2, 5\}$$

$$DOM(R_2) = \{a, c, x\}$$

$$RAN(R_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$DOM(R_3) = \{a, b, c, x\}$$

$$RAN(R_3) = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$DOM(R_4) = \{a, c, x, y\}$$

$$RAN(R_4) = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$R_1^{-1} = \{(2, a), (2, c), (1, x), (5, y), (5, z)\}$$

$$R_2^{-1} = \{(1, a), (5, a), (3, c), (2, x), (4, x)\}$$

$$R_3^{-1} = \{(4, a), (2, b), (5, c), (1, x)\}$$

$$R_4^{-1} = \{(3, a), (1, b), (5, b), (3, c), (5, c), (1, x), (4, y)\}$$

5.2 Propiedades de las Relaciones

Las relaciones se pueden clasificar de acuerdo al tipo de asociación que hay en sus elementos como: uno-a-uno **1-1**, uno-a-mucho **1-M**, muchos-a-uno **M-1** o muchos-a-muchos **M-M**.

Recordemos que una relación es un conjunto de pares ordenados.

Definición: Una relación R de A a B es: Muchos-a-uno, **M-1** si existen dos pares con el mismo segundo elemento, esto es existen (x, y) , (z, y) distintas en la relación.

Uno-a-muchos **1-M** si existen dos pares con el mismo primer elemento, esto es existen (x,y) , (x,z) distintas en la relación.

Muchos-a-muchos **M-M** si es muchos-a-uno y uno-a-muchos. O sea que hay al menos dos pares con el mismo primer elemento y también hay dos pares con el mismo segundo elemento. O sea que cumple las dos definiciones anteriores.

Uno-a-uno **1-1** si no es muchos-a-uno ni uno-a-muchos, o sea que no hay dos pares con el mismo primer elemento y no hay dos pares con el mismo segundo elemento. Esto significa que cumple las dos condiciones siguientes

Representación matricial: Una relación entre dos conjuntos A y B puede ser representada por una matriz binaria, que consiste en 0's y 1's. Asociamos cada elemento del primer conjunto A con un renglón de la matriz y cada elemento del segundo conjunto B con una columna de la matriz. Los elementos deben estar ordenados. En el correspondiente lugar del renglón y columna asociada a un par de elementos el valor es 1 si el par ordenado está en la relación y 0 si el par no está.

Ejemplo: Si $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$ y la relación $R = \{(a,2), (a,3), (b,1), (d,2)\}$ entonces la matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La representación matricial nos da otra forma de poder manejar una relación y es muy útil sobretodo cuando la cantidad de elementos en los conjuntos es pequeña, también nos sirven para reconocer fácilmente que propiedades tiene una relación sobre un conjunto como se ve en la siguiente sección.

Relaciones Sobre un Conjunto

Cuando la relación es entre elementos del mismo conjunto, o sea que el conjunto B es igual a A, entonces decimos que es una **relación en A**.

Definición Una relación R en A puede ser

Reflexiva: Si todo elemento en A está relacionado consigo mismo.

Irreflexiva: Si ningún elemento en A está relacionado consigo mismo.

Simétrica: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento, el segundo también se relaciona con el primero.

Antisimétrica: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento diferente, el segundo no se relaciona con el primero.

Transitiva: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento y el segundo está relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero: Observamos que las relaciones en un conjunto tienen una matriz **cuadrada** asociada y esta juega un papel muy importante para determinar las propiedades anteriores.

Relaciones Reflexivas

Una relación en A es

Reflexiva: Si todo elemento en A está relacionado con sí mismo.

Antirreflexiva: Si ningún elemento en A está relacionado con sí mismo.

Cuando tenemos la matriz de una relación es muy fácil verificar si es reflexiva

Ejemplos. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (a, c), (b, c), (c, a), (d, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, a), (a, d), (c, b), (d, a), (c, e), (e, e)\}$$

$$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (b, c), (b, a)\}$$

$$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (c, e), (b, d), (d, a), (e, e)\}$$

$$R_5 = \{(a, c), (a, e), (e, c), (b, c)\}$$

$$R_6 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, e), (b, c), (c, b), (e, a)\}$$

$$R_7 = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, e), (e, c), (b, c), (b, a)\}$$

Teorema Una relación R en un conjunto es reflexiva si y sólo si la diagonal principal de la matriz asociada a la relación tiene únicamente unos.

De la misma forma es Antirreflexiva si tiene solamente ceros.

En el ejemplo anterior las relaciones R_3 y R_6 son reflexivas, también se puede ver que R_5 y R_7 son antirreflexivas. Las demás relaciones no son reflexivas ni antirreflexivas.

Relaciones Simétricas y Transitivas

Recordemos primeramente las propiedades:

Simétrica: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento, el segundo también se relaciona con el primero.

Antisimétrica: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento diferente, el segundo no se relaciona con el primero.

Transitiva: Si cuando un elemento está relacionado con un segundo elemento y el segundo está relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero:

Como podemos ver para que una relación sea simétrica, siempre que un par está en R el par inverso debe también estar. sin embargo en la antisimétrica si un par está en la relación el par inverso no puede estar.

Nota: Vemos que la definición de antisimétrica se indica que el par inverso no puede estar cuando los elementos son distintos por razones obvias.

Como ejemplo analizaremos las mismas relaciones de la sección anterior:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (a, c), (b, c), (c, a), (d, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, a), (a, d), (c, b), (d, a), (c, e), (e, e)\}$$

$$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (b, c), (b, a)\}$$

$$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (c, e), (b, d), (d, a), (e, e)\}$$

$$R_5 = \{(a, c), (a, e), (e, c), (b, c)\}$$

$$R_6 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, e), (b, c), (c, b), (e, a)\}$$

$$R_7 = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, e), (e, c), (b, c), (b, a)\}$$

Teorema Una relación R en un conjunto es simétrica si y sólo si los elementos opuestos con respecto a la diagonal principal son iguales.

Teorema Una relación R en un conjunto es antisimétrica si y sólo si los elementos opuestos con respecto a la diagonal principal no pueden ser iguales a 1; esto es, puede aparecer 0 con 1 o pueden aparecer ceros.

De las relaciones anteriores R_6 es simétrica. R_3 , R_5 son antisimétricas y R_3 , R_4 y R_5 son transitivas.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
Reflexiva	NO	NO	SI	NO	NO	SI	NO

Antirreflexiva	NO	NO	NO	NO	SI	NO	SI
Simétrica	NO	NO	NO	NO	NO	SI	NO
Antisimétrica	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI
Transitiva	NO	NO	SI	NO	SI	NO	NO

5.3 Relaciones de equivalencia

Cerradura.

En matemáticas y en computación las relaciones de equivalencia juegan un papel muy importante, en la mayoría de las estructuras matemáticas que manejamos la igualdad es en realidad una equivalencia, como por ejemplo en fracciones.

En muchas ocasiones una relación no cumple alguna de las propiedades de equivalencia, pero hay relaciones que la incluyen y que sí cumplen la propiedad. De todas las relaciones la menor posible se llama su cerradura.

Definición. Sea R una relación en un conjunto A

Una cerradura reflexiva **ref**(R) de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es reflexiva.

Una cerradura simétrica **sim**(R) de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es simétrica, con símbolos:

Una cerradura transitiva **trans**(R) de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es transitiva, con símbolos:

La cerradura reflexiva y la cerradura simétrica de una relación es muy simple de encontrar, solamente se le agregan los pares necesarios de una forma directa. Cuando conocemos la matriz asociada a la relación, la forma de encontrar las cerraduras anteriores es muy simple.

Teorema: Sea R una relación en A y M_R su matriz asociada. La cerradura reflexiva y la cerradura simétrica de R son únicas y se pueden obtener mediante las matrices siguientes

$M_{ref(R)} = M_R \cup I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden $|A|$.

$M_{sim(R)} = [a_{ij}]$, donde $a_{ji} = 1$ si $a_{ij} = 1$ en M_R .

La Matriz identidad I_n de orden n es:

O sea que para lograr la cerradura reflexiva debemos agregar 1's en la diagonal, para la cerradura simétrica debemos agregar 1's en lugares simétricos a la diagonal principal donde existan 1's.

Equivalencia

Definición. Una relación R en un conjunto A es de **equivalencia** si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A entonces R particiona al conjunto A en subconjuntos disjuntos llamados clases de equivalencia.

Una **partición** de un conjunto está formada por subconjuntos disjuntos **ningún elemento aparece en dos conjuntos** tal que la unión es igual al conjunto original.

Nota. El inverso del teorema también se cumple, si A_1, A_2, \dots, A_n es una partición de A entonces la relación R definida como: dos elementos están relacionados si pertenecen al mismo subconjunto A_i es una relación de equivalencia.

En computación y sobretodo en matemáticas utilizamos mucho el concepto de equivalencia, por ejemplo para manejar fracciones, escribimos por ejemplo

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y decimos que un medio es igual a dos cuartos

pero en realidad no queremos decir que son iguales, pues en realidad **no lo son**, es obvio que tener un 1 carro no es igual a dos mitades de carro, lo que estamos simbolizando es que son equivalentes, o sea que cumplen las tres propiedades básicas de la igualdad, que son: reflexiva, simétrica y transitiva; y que para fines de manejo de fracciones las tomamos como **iguales**, por eso muchas personas prefieren utilizar el término equivalencia de fracciones en lugar de igualdad de fracciones.

Lo que sucede es que como la relación de equivalencia entre fracciones es una relación de equivalencia, particiona a las fracciones en clases de equivalencia, así: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{-8}{16}, \frac{27}{54}, \dots\}$ es una clase y como las operaciones algebraicas no se alteran al sustituir elementos de una misma clase, consideramos que $\frac{1}{2}$ es lo mismo que $\frac{2}{4}$.

Esto es algo muy común en matemáticas, como se mencionó anteriormente, y por ejemplo en geometría ángulos y figuras congruentes se consideran **iguales**.

También en geometría euclidiana plana podemos considerar el caso de rectas paralelas. Si definimos dos líneas paralelas como aquellas líneas que nunca se tocan, la relación de **paralela** no cumple la reflexividad ni la transitividad

Sin embargo si definimos dos líneas paralelas como aquellas que tienen la misma inclinación; esto es, que son verticales o que tienen la misma pendiente, entonces es una relación de equivalencia, por eso es que muchas personas prefieren la segunda definición.

Ordenes Parciales

Definición. Una relación R es de orden parcial o simplemente de **orden** si cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.

Igual que las relaciones de equivalencia, las relaciones de orden también se utilizan mucho en computación; con una relación de orden se establece **un orden**, como su nombre lo dice, en los elementos del conjunto. Se llama **orden parcial** porque no todos los elementos están necesariamente relacionados. Cuando todos los elementos están relacionados se llama **orden total**.

Una de las relaciones más importantes en matemáticas es la relación **menor o igual que** en los números reales, que claramente se ve que es un orden total.

Otra relación de orden muy importante es la relación de **subconjunto** entre los subconjuntos de un conjunto dado.

La relación **menor que** no es de orden porque no cumple la propiedad reflexiva.

Observamos que tomamos la cerradura reflexiva de la relación **menor que** obtenemos la relación **menor o igual que**, haciendo una analogía con una relación en general, podemos establecer que si una relación antirreflexiva se convierte en relación de orden al tomar su cerradura reflexiva, entonces se llama relación de orden estricto y en cierta forma se comporta como si fuera **menor que** en lugar de menor o igual.

Por ejemplo si tomamos la relación de subconjunto propio entre conjuntos, o sea que dos conjuntos están relacionados si el primero es subconjunto del segundo pero no son el mismo conjunto. Claramente cumple las propiedades antisimétrica y transitiva y al tomar la cerradura transitiva la convertimos en una relación de orden.

También se define orden total, cuando dos elementos cualesquiera en una relación de orden siempre están relacionados.

Por ejemplo en cualquier conjunto de números reales la relación **menor o igual** es de orden total, pues dado un par cualesquiera de números a y b , a está relacionado con b o b está

relacionado con a . Sin embargo, en los conjuntos la relación de **subconjunto de** no es de orden total pues los conjuntos $\{a,b\}$ y $\{a,c\}$ no están relacionados.

Ejemplo.

Considere el conjunto A de los divisores positivos de 40 y definimos una relación R en A como **x está relacionado con y** si x divide a y ; o lo que es lo mismo si y es un múltiplo de x ., con $A = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

Entonces $(2,8)$ está en la relación pues 2 divide a 8, pero $(4,10)$ no está pues 4 no divide a 10.

La relación es reflexiva, pues todo número es divisible por sí mismo no es simétrica, pues 2 divide a 8, pero 8 no divide a 2 es antisimétrica, pues si x divide a y , siendo x distinto de y no podemos tener que y divida a x finalmente, vemos que es transitiva, pues si se cumple que x divide y , y y divide z entonces y/x , z/y son enteros, pero esto implica que z/x es entero, pues el producto de dos enteros es entero, por lo que obtenemos que x divide a z .

Por lo tanto la relación es una relación de orden. En general la relación de **divide a** es siempre una relación de orden. En la siguiente sección se verá una forma de representar con un diagrama una relación de orden y se verán ejemplos de cómo quedan representadas las relaciones sobre los divisores. En general se pueden clasificar de acuerdo a su descomposición en factores.

5.4 Aplicaciones

Diagrama de Hasse

En matemáticas, un diagrama de Hasse es una representación de un conjunto parcialmente ordenado finito. La representación se hace mediante un grafo, o sea un diagrama que consta de nodos y aristas, ver la siguiente sección de Teoría de Grafos.

Supongamos que tenemos una relación R en A que es relación de orden. Primeramente sabemos que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Formamos el grafo con los elementos de A , estos son los nodos, y las aristas son conexiones entre nodos relacionados, en este caso es un grafo dirigido. La primera condición es que si dos elementos están relacionados, digamos $(a,b) \in R$ entonces dibujamos b a un nivel superior de a .

Un diagrama de Hasse elimina la necesidad de representar lazos, puesto que se tiene que la relación parcialmente ordenada es reflexiva.

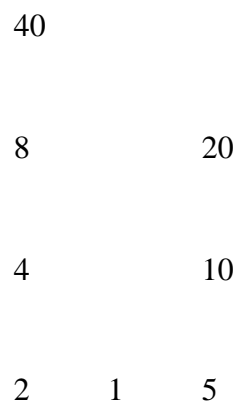
Puesto que la transitividad también está implicada, se puede prescindir de mostrar líneas entre elementos que tengan un elemento intermedio relacionado, pues se sobrentienden.

Con estos diagramas las relaciones de orden son muy fácil de representar y sobretodo de entender.

Ejemplo. Consideremos el ejemplo de la sección anterior de los divisores del 40.

$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$, $R = \mathcal{D}_{40}$ la relación **divide a**.

El diagrama quedaría:

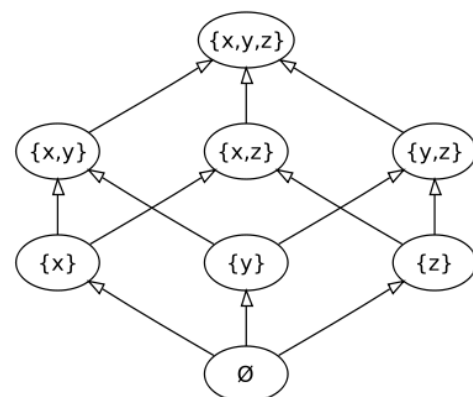


Si consideramos todas las parejas en la relación tenemos:

$\mathcal{D}_{40} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,8), (1,10), (1,20), (1,40), (2,2), (2,4), (2,8), (2,10), (2,20), (2,40), (4,4), (4,8), (4,20), (4,40), (5,5), (5,10), (5,20), (5,40), (8,8), (8,40), (10,10), (10,20), (10,40), (20,20), (20,40), (40,40)\}$

Los pares azules son las únicas líneas que se dibujan en el diagrama.

Definición. Sea r una relación en A , y supongamos que R es una relación de orden. Se dice que **y sigue a x** si $(x,y) \in R$ y no hay elemento de S entre x & y .

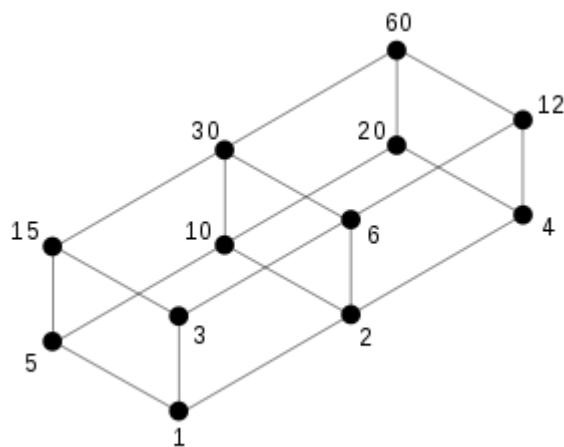


El orden parcial es entonces precisamente la clausura transitiva de la relación de **seguir**.

El diagrama de Hasse de A se puede entonces definir abstractamente como el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) tales que y sigue a x , es decir, el diagrama de Hasse se puede identificar con la relación de **seguir**.

Ejemplo 2. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ de todos los divisores de 60. Este conjunto está ordenado parcialmente por la relación de divisibilidad.

El diagrama quedaría:



En el caso de divisibilidad, tomando los divisores de un número entero positivo n , siempre tenemos una relación de orden. Los diagramas de Hasse correspondientes tienen al entero n en la parte superior, el número 1 estará en la parte inferior, y los divisores primos siguen al elemento inferior. Podemos considerar la parte inferior como el nivel 0, los primos irán colocados en el nivel 1, y así sucesivamente, por niveles hasta llegar al número n .

Podemos considerar en el caso de los divisores de un número que cada nivel, del diagrama de Hasse, corresponde a la cantidad de divisores primos en su factorización, tomando en cuenta factores repetidos, por ejemplo en D_{40} , 40 tiene cuatro factores, por lo tendremos 5 niveles (recordemos que el 1 está en el nivel 0). Así por ejemplo el 10 está en el segundo nivel, pues tiene dos factores 2 y 5, mientras que 20 está en el tercer nivel pues tiene 3 factores, dos veces al 2 y al 5.

6. TEORÍA DE GRAFOS

La Teoría de Grafos nace con la publicación de un artículo de Euler sobre los puentes de la ciudad de Königsberg, lo que anteriormente sólo unos cuantos estudiosos desarrollaban por especial y particular interés. Sin embargo con el auge de las computadoras, los grafos han venido a ser una idea central en el desarrollo de estructuras para describir situaciones, guardar información, plantear problemas y establecer algoritmos.

6.1 Elementos y características de los grafos

Definición: Un grafo $G = (N, A)$ consta de un conjunto de nodos N y un conjunto de aristas A , en donde a cada arista es un par no ordenado de nodos. Una arista en general se representa por $\{a, b\}$.

Una forma de representar grafos es mediante círculos para los nodos, conectados por líneas para las aristas.

Ejemplo: $G = \{ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8 \}$, $A = \{ \{n_1, n_2\}, \{n_1, n_5\}, \{n_2, n_3\}, \{n_3, n_4\}, \{n_4, n_7\}, \{n_2, n_6\}, \{n_6, n_8\}, \{n_6, n_2\} \}$

Podemos extender el concepto de grafo donde pueda haber dos aristas que conecte los mismos nodos, por lo que se le puede anteponer un nombre, por ejemplo $a_1(\{n_2, n_6\})$, $a_2(\{n_2, n_6\})$ son dos aristas para unir los nodos n_2 y n_6 . También puede ser que en una arista importe el orden de los nodos por lo que podemos en este caso utilizar la notación de par ordenado (n_1, n_2) .

Multigrafo: Grafo que tiene varias aristas que conectan los mismos nodos.

Digrafo o grafo dirigido es un grafo con aristas dirigidas. Las aristas se representan con pares ordenados y en el diagrama se dibujan como flechas del primer al segundo nodo.

Lazo arista que conecta dos nodos iguales $\{n_i, n_i\}$

Definición Una **Ruta** o **recorrido** de $a = x_0$ a $b = x_n$ de longitud n es una sucesión de aristas consecutivas, o sea de la forma $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$.

Nota Las aristas se representaron por pares ordenados porque en este caso nos interesa el orden en que se especifican los nodos, el grafo no necesariamente es grafo dirigido.

Una ruta es **cerrada** si $x_n = x_0$, o sea que el último nodo es igual al primero.

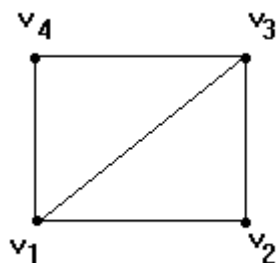
Una ruta es un **camino** si no se repite ninguna arista. Esto es si (x_i, x_j) es un par en el recorrido, no puede aparecer posteriormente y tampoco puede aparecer el par (x_j, x_i) .

Un camino es **simple** si no repite ningún nodo, excepto el primero y el último. O sea que todos los nodos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son diferentes, permitiendo solamente $x_n = x_0$ en el caso de que sea cerrado.

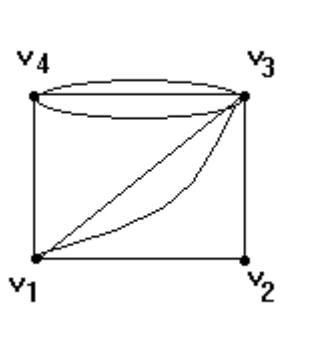
Un grafo es **conexo** o **conectado** si existe un camino entre cualesquier par de nodos.

El grafo G es un par $G = (V, A)$ donde V es un conjunto finito de Nodos o Vértices y A tiene como elementos subconjuntos de V de cardinalidad dos denominados aristas los vértices de V generalmente son denominados v_1, v_2, \dots Ejemplo el grafo:

$$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_1], [v_1, v_3]\})$$

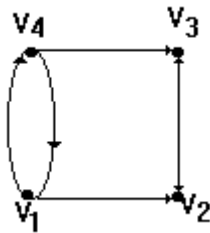


Multigrafos ; Grafos con Aristas repetidas



Formalmente un digrafo D es un par $D=(V,A)$, donde V es un conjunto de vértices

Grafos direccionado o digrafo es un grafo con direcciones asignadas a sus aristas. A es un conjunto de pares de vértices denominados arcos o sea $A \subseteq V \times V$

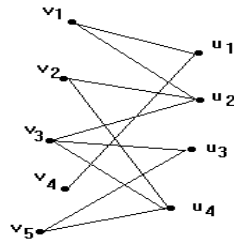


$$D=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_4,v_3),(v_4,v_1),(v_1,v_4),(v_1,v_3)\}$$

$G = (V, E)$ es un Grafo y $e=(v_1,v_2) \in E$, entonces diremos v_1 es adyacente a v_2 (o viceversa) y que es incidente a v_1 (y v_2). El grado de un vértice $v \in G$ es el número de arcos incidente a v . En el grafo el grado de v_1 es 3.

En el digrafo $D = (V,A)$ el grado entrada de un nodo v es el nº de arcos de la forma (u, v) que están en A . El grado de salida es el nº de arcos que tienen la forma (v,u)

Suponga que $B = (W, E)$ es un grafo que tiene la siguiente propiedad que el conjunto de vértices W puede ser particionado en dos conjuntos V y U y cada arista en E tiene un vértice en V y uno vértice en U . Entonces B es denominado Grafo Bipartito.



6.2 Representación de los Grafos

Grafos Dirigidos

El grafo $G = [V, A]$



Conjunto de Conjunto de pares ordenados de vértices
nodos o vértices $\alpha \in A$ llamados arcos.

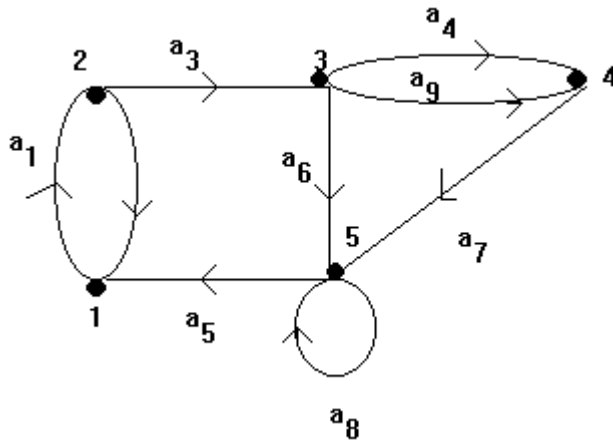
Si $N = |V|$ es el número de vértices, entonces se dice que el grafo es del orden N en vértices son numerados de $i=1, \dots, N$

Si $a = (i, j)$ es un arco de G , entonces i es el punto inicial de a y j es el punto terminal de a . En general se dice que $|A| = M$

Gráficamente los vértices se representan los puntos y los arcos $a = (i, j)$ es representado por un arreglo conectando los punto i y j (el tope del arreglo).

Arcos con coincidencia de puntos finales se llama loop.

Un p-grafo es un grafo con no más de p arcos (i,j) entre dos pares cualquiera de vértices i y j.



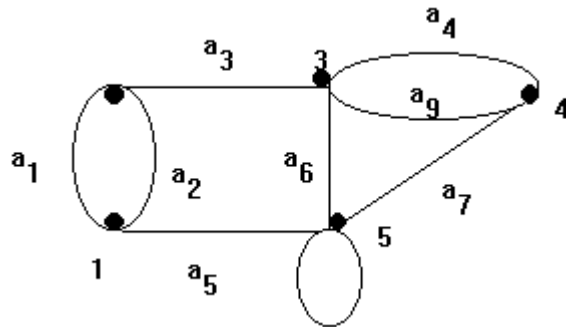
$a_8=(5,5)$ es un loop

2. Grafo, ya que a_4 y a_9 son (3,4)

j es sucesor de i si existe arco con i inicial y j terminal. Los sucesores de un vértice i V es denominado por \sqrt{i}

j es antecesor de i si existe un arco de la forma (j,i), el conjunto de los antecesores es \sqrt{i}^{-1}

Grafos no dirigidos



Multigrafos grafos donde más que una arista puede existir entre dos vértices. Grafo simple si no existe loop y si nunca existe más que una arista entre dos vértices.

Dos arcos o aristas son llamados adyacentes si existe al menos un punto común entre ellas.

Grado de un vértice.

$$d_G(i) = d_G^+(i) + d_G^-(i)$$

para el nodo 2 de la primera figura:

$$d^+(2)=2, d^-(2)=1 \Rightarrow d(2)=3$$

Cociclo de un Grafo

$$w(A) = w^+(A) + w^-(A)$$

w : Conjunto de arcos de esta forma es denominado Cociclo.

w^+ : Conjunto de arcos con inicio en A y término en $A=X-A$

Grafos Simétricos

Si para todos los pares de vértices (i,j) existen muchos arcos de la (i,j) como muchos de la forma (j,i) .

Grafos Asimétricos

Un 1 - grafo $G=(V,A)$ es asimétrico cuando:

$$(i,j) \in A \text{ U } \rightarrow (j,i) \notin A$$

Grafo Completo. Clique

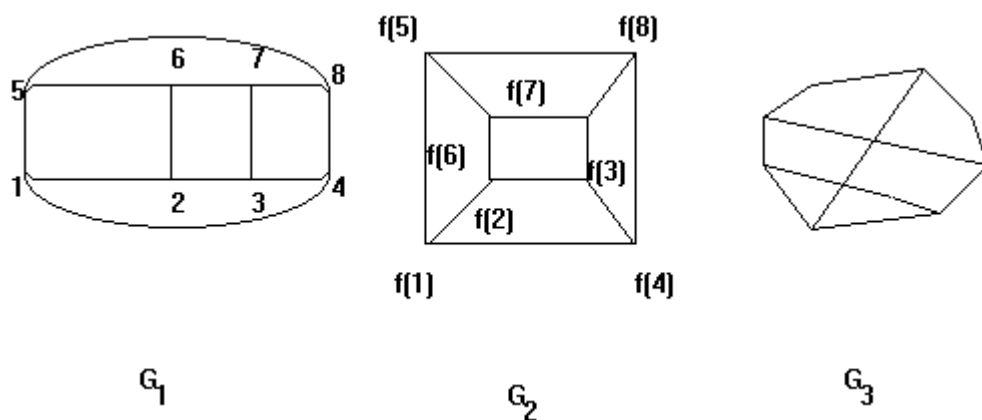
Si para todos los pares de vértices (i,j) existe un arista de la forma (i,j)

1.- Grafo es completo s si

$$(i,j) \in A \rightarrow (j,i) \in A$$

Un grafo completo de orden N es denominado por K_N . Un subconjunto de vértices $C \subset V$ tal que cualquier dos vértices de C son conectados por una arista es llamado Clique.

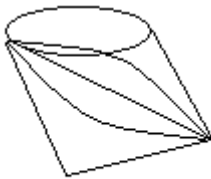
Si dos grafos: $G_1 (V_1, A_1)$, $G_2 (V_2, A_2)$. Con $|V_1| = |V_2| = M$ existe una función unívoca $f: V_1 \rightarrow V_2$, tal que $(v,w) \in A_1$ ssi $(f(v), f(w)) \in A_2$, para todo $v,w, \in V_1$. si es positivo G_1 Y G_2 Son isomorfos



No existe función f que haga coincidir las representaciones G_1 y G_3 , G_3 no es isomorfo a G_1 ni G_2 .

El problema de Isomorfismo puede ser resuelto naturalmente por "Fuerza Bruta", o búsqueda exhaustiva examinando cada una de las $n!$ permutaciones de V_1 (o sea cada función f). Este algoritmo necesitaría $\Omega(n!)$ pasos en el peor caso.

No existe otro algoritmo general eficiente para esto.



Grado de un vértice $v \in V$, "grado (v)" es el número de vértices adyacentes a v . Grafo regular de grado r , cuando todos los vértices poseen el mismo grado. El ejemplo es regular de grado 3. Vértice.

Secuencia de vértices v_1, \dots, v_k tal que $(v_j, v_{j+1}) \in A$, $1 \leq j < k$ es denominado camino de v_1 a v_k . Un camino de K vértices es formado por $k-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$. El valor $k-1$ es el largo del camino.

Si todos los vértices fueran diferentes a la secuencia el camino es un camino elemental. Si todas las aristas fueran diferentes a la secuencia se trata de una trayectoria. Un ciclo es un camino donde v_1, \dots, v_k, v_{k+1} y $v_1 = v_{k+1}$ con $k > 3$. Si el camino es simple el ciclo también es simple $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$. Un grafo sin ciclos simples es acíclico. Triángulo es un ciclo de largo 3.

Camino hamiltoniano: Es un camino que contiene cada vértice exactamente una sola vez.

Camino euleriano: Es un camino que contiene cada arista exactamente una sola vez.

Un ciclo V_1, \dots, V_k, V_{k+1} es hamiltoniano cuando el camino V_1, \dots, V_k lo es.

Un grafo $G(V, A)$ é denominado conexo cuando existe camino entre cada par de vértices de G . En C.C es desconexo. Un grafo G es totalmente desconectado cuando no posee aristas.

Si S un conjunto tal que $S' \subseteq S'$. Diremos que S' es maximal en relación a una cierta propiedad P , cuando S' satisface la propiedad P y no existe subconjunto $S'' \subset S'$, que también satisfaz P . No necesariamente S' es el mayor subconjunto de S . satisfaciendo P . Igualmente se define Minimal. Se denomina componentes conexos de un grafo G a los Subgrafos Maximales de G que son conexos. La propiedad P es equivalente a ser conexo.

6.3 Algoritmos

Dado una red $G(V, A)$ un árbol de cobertura mínimo es el árbol que conecta todos los vértices de la red con $n-1$ arcos (n siendo el numero de vértices y m el numero de arcos) pero con el menor costo total.

Los dos algoritmos más importantes para determinar cobertura mínima son:

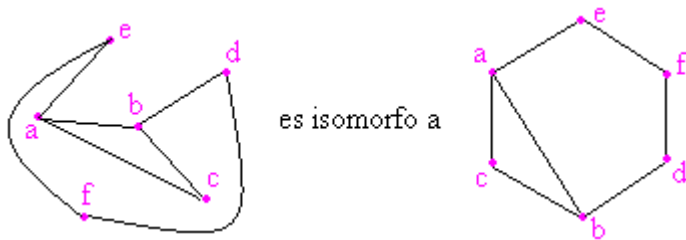
- **Algoritmo de Kruskal (1956).** El cual primero ordena todos los arcos en orden no decrecientes, después los examina de menor a mayor costo de la red y si no forman ciclos con los ya seleccionados, se incorporan al árbol de cobertura mínima. La construcción se detiene cuando se han seleccionados, los $n-1$ arcos o se han examinado los m arcos de la red.
- **Algoritmo de Prim's (1957).** Construye un árbol de cobertura partiendo con un vértice arbitrario s el cual se une con los vecinos más cercanos examinando los arcos incidentes a s que posee el menor costo hasta revisar todos los arcos de la red.

Para grafos pequeños (hasta 100 nodos) Prim's funciona mejor, pero para grafos mayores y densos Kruskal presenta un mejor desempeño.

Dibujar un grafo para resolver un problema es un reflejo muy común, que no precisa conocimientos matemáticos. Un grafo se parece a la figura siguiente, y consta de **vértices** y de **aristas** que unen algunos de ellos.

En la teoría de los grafos, sólo queda lo esencial del dibujo: la forma de las aristas no son relevantes, sólo importan sus extremidades (o cabos); la posición de los vértices tampoco, y se puede variar para obtener un grafo más claro, y hasta sus nombres se pueden cambiar. Estos cambios se llaman **isomorfismos** de grafos. Generalmente, se considera que colocar los vértices en forma de polígono regular da grafos muy legibles.

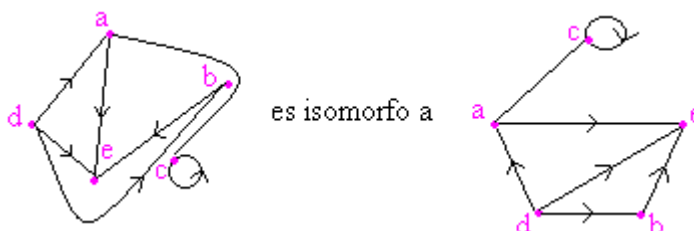
Formalmente: Un **grafo** es una pareja $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de puntos, llamados vértices, y A es un conjunto de pares de vértices, llamadas aristas. Para simplificar, la arista $\{a,b\}$ se denota ab .



En la figura, $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, y $A = \{ab, ac, ae, bc, bd, df, ef\}$.

Una red de carreteras que conectan ciudades, una red eléctrica, un alcantarillado se pueden modelar con grafos.

En algunos casos es necesario imponer un sentido a las aristas, por ejemplo, si se quiere representar la red de las calles de una ciudad con sus inevitables direcciones únicas. Las aristas son entonces pares ordenados de vértices, con $(a,b) \neq (b,a)$, y se define así **grafos orientados**, como el siguiente:



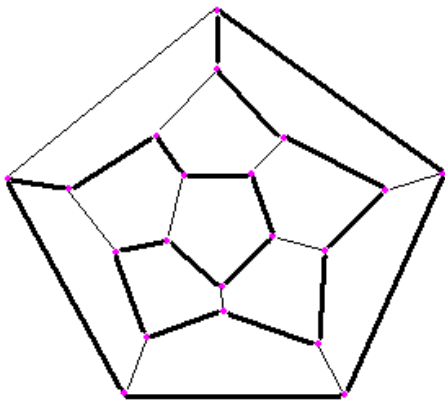
En este grafo se ha autorizado una arista que tiene sus dos cabos idénticos: es un rizo (o bucle), y aparece también una arista sin flecha: significa que la arista se puede recorrer en cualquier sentido: es bidireccional, y corresponde a dos aristas orientadas.

Aquí $V = \{ a, b, c, d, e \}$, y $A = \{ (a,c), (d,a), (a,e), (b,e), (c,a),(c,c), (d,b) \}$.

Del vértice d sólo salen vértices: es una fuente. Al vértice e sólo entran vértices: es un agujero, o pozo.

Un **ciclo** es un camino, es decir una sucesión de aristas adyacentes, donde no se recorre dos veces la misma arista, y donde se regresa al punto inicial. Un **ciclo hamiltoniano** tiene además que recorrer todos los vértices. Por ejemplo, en un museo grande (al estilo del Louvre), lo idóneo sería recorrer todas las salas una sola vez, esto es buscar un ciclo hamiltoniano en el grafo que representa el museo (los vértices son las salas, y las aristas los corredores o puertas entre ellas).

Se habla también de **camino hamiltoniano** si no se impone regresar al punto de partida, como en un museo con una única puerta de entrada. Por ejemplo, un caballo puede recorrer todas las casillas de un tablero de ajedrez sin pasar dos veces por la misma: es un camino hamiltoniano.

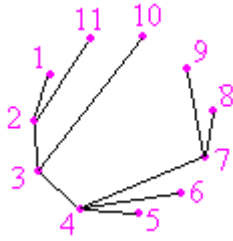


Ejemplo de un ciclo hamiltoniano en el grafo del dodecaedro.

Hoy en día, no se conocen métodos generales para hallar un ciclo hamiltoniano en tiempo polinómico, siendo la búsqueda en bruto de todos los posibles caminos u otros métodos excesivamente costosos. Este problema entra en el conjunto de los NP-Completo

6.4 Árboles

Un grafo que no tiene circuito y que conecta a todos los puntos, se llama un **árbol**:



En un grafo con n vértices, los árboles tienen exactamente $n - 1$ aristas, y hay n^{n-2} árboles posibles.

Los árboles son grafos que conectan vértices utilizando el menor número posible de aristas, de ahí su interés concreto.

En muchos casos, es preciso atribuir a cada arista un número específico, llamado *valuación*, *ponderación* o *coste* según el contexto, y se obtiene así un **grafo valuado**. Formalmente, es un grafo con una función $v: A \rightarrow \mathbf{R}_+$.

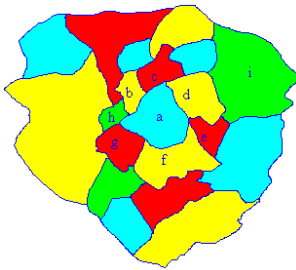
Por ejemplo, un representante comercial tiene que visitar n ciudades conectadas entre sí por carreteras; su interés previsible será minimizar la distancia recorrida (o el tiempo, si se pueden prever atascos). El grafo correspondiente tendrá como vértices las ciudades, como aristas las carreteras y la valuación será la distancia entre ellas. Y, de momento, no se conocen métodos generales para hallar un ciclo de valuación mínima, pero sí para los caminos desde a hasta b , sin más condición.

Otro problema famoso relativo a los grafos: ¿Cuántos colores son necesarios para dibujar un mapa político, con la condición obvia que dos países adyacentes no puedan tener el mismo color? Se supone que los países son de un solo pedazo, y que el mundo es esférico o plano. En un mundo en forma de toro; el teorema siguiente no es válido:

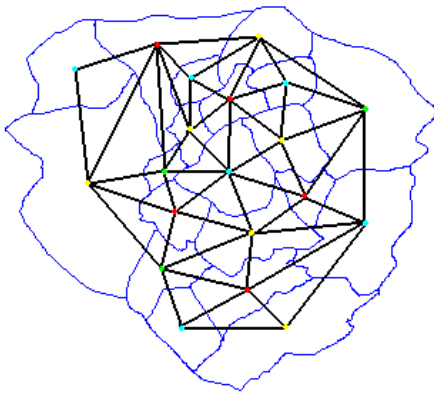
Teorema de los cuatro colores: Cuatro colores son siempre suficientes para colorear un mapa.

El mapa siguiente muestra que tres colores no bastan: Si se empieza por el país central a y se esfuerza uno en utilizar el menor número de colores, entonces en la corona alrededor de a

alternan dos colores. Llegando al país **h** se tiene que introducir un cuarto color. Lo mismo sucede en **i** si se emplea el mismo método.

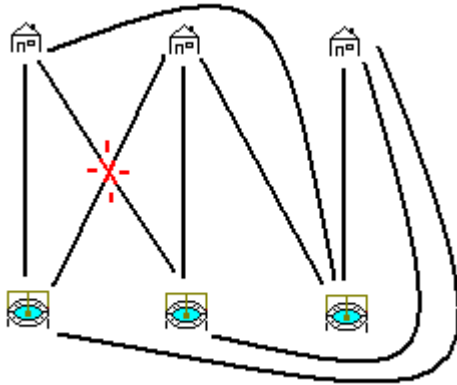


La forma precisa de cada país no importa; lo único relevante es saber qué país toca a qué otro. Estos datos están incluidos en el grafo donde los vértices son los países y las aristas conectan los que justamente son adyacentes. Entonces la cuestión equivale a atribuir a cada vértice un color distinto del de sus vecinos.



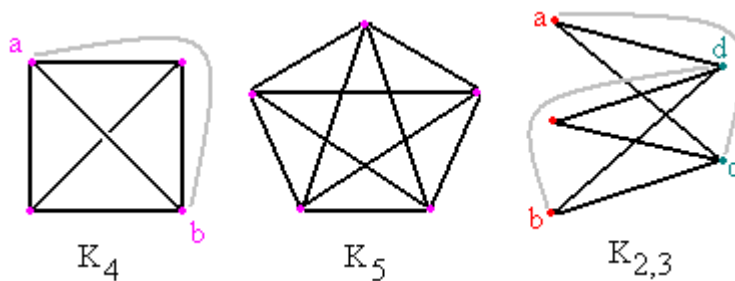
Hemos visto que tres colores no son suficientes, y demostrar que con cinco siempre se llega, es bastante fácil. Pero el teorema de los cuatro colores no es nada obvio. prueba de ello es que se ha tenido que emplear los ordenadores para acabar la demostración (se ha hecho un programa que permitió verificar una multitud de casos , lo que ahorró muchísimo tiempo a los matemáticos). Fue la primera vez que la comunidad matemática aceptó una demostración asistida por ordenador.

Un juego muy conocido es el siguiente: Se dibujan tres casas y tres pozos. Todos los vecinos de las casas tienen el derecho de utilizar los tres pozos. Como no se llevan bien en absoluto, no quieren cruzarse jamás. ¿Es posible trazar los nueve caminos que juntan las tres casas con los tres pozos sin que haya cruces?



Cualquier disposición de las casas, los pozos y los caminos implica la presencia de al menos un cruce.

Se nota K_n el **grafo completo** con n vértices, es decir en el cual cada par de vértices están conectadas por una arista. $K_{n,p}$ es el grafo compuesto de un grupo de n vértices y otro de p , tal que cada vértice del primer grupo está conectado con cada uno del segundo, y no hay más aristas. El juego anterior equivale a descubrir si el grafo $K_{3,3}$ es **planario** (se dice también **plano**), es decir, si se puede dibujar en un plano sin que haya cruces. Y la respuesta es no. Establecer qué grafos son planarios no es obvio, y tiene que ver con la topología.



En la figura, se nota que K_4 es planar (con tal de desviar la arista ab al exterior del cuadrado), que K_5 no lo es en absoluto, y que $K_{3,2}$ lo es también (desvíos en gris).

En un grafo, la distancia entre dos vértices es el menor número de aristas de un recorrido entre ellos. El **diámetro**, en una figura como en un grafo, es la mayor distancia entre dos puntos de la misma. El diámetro de los K_n es 1, y el de los $K_{n,p}$ es 2. Un diámetro infinito puede significar que el grafo

tiene una infinidad de vértices o simplemente que no es **conexo**. También se puede considerar el **diámetro promedio**, como el promedio de las distancias entre dos vértices.

El mundo de Internet ha puesto de moda esa idea del diámetro: Si descartamos los sitios que no tienen enlaces, y escogemos dos páginas *web* al azar: ¿En cuántos *clics* se puede pasar de la primera a la segunda? El resultado es el diámetro de la Red, vista como un grafo cuyos vértices son los sitios, y cuyas aristas son lógicamente los enlaces.

En el mundo real hay una analogía: tomando al azar dos seres humanos del mundo, ¿En cuántos saltos se puede pasar de uno a otro, con la condición de sólo saltar de una persona a otra cuando ellas se conocen personalmente? Con esta definición, se estima que el diámetro de la humanidad es de ... ¡ocho solamente!

Este concepto refleja mejor la complejidad de una red que el número de sus elementos.

Clasificación de Grafos

Isomorfismo y grafos planos.

Grafos Isomorfos: Dos grafos son isomorfos cuando existe una correspondencia biunívoca, entre sus vértices y otra entre sus aristas, de tal forma que dos nodos están unidos por una arista en el primer grafo, los correspondientes nodos asociados deben estar unidos por la arista asociada. Esto es:

Sean $G_1 = (N_1, A_1)$, $G_2 = (N_2, A_2)$, entonces G_1 y G_2 son **isoformas** si existen dos funciones biyectivas $f : N_1 \rightarrow N_2$ y $g : A_1 \rightarrow A_2$ tales que si α es una arista que une los nodos n y m en G_1 entonces $g(\alpha)$ une los nodos $f(n)$ y $f(m)$ en G_2 .

De manera más compacta con símbolos: $g(\{m, n\}) = \{f(m), f(n)\}$ esto representa que hay una arista que une m y n , también indica que existe una arista entre $f(m)$ y $f(n)$ y que g las asocia.

Representación de estructura mediante grafos.

Uno de los aspectos más importantes en computación es la programación. Para elaborar un programa es conveniente tener una forma de representar las ideas antes de elaborar el código. Aquí presentamos una aplicación de los grafos en la representación de los conceptos básicos de diagramas de flujo. Por supuesto que los diagramas de flujo son mucho más generales que su uso en programación y pueden ser utilizados para muchas otras aplicaciones.

Árboles:

Es una estructura jerárquica aplicada sobre una colección de elementos u objetos llamados nodos; uno de los cuales es conocido como raíz. Además se crea una relación o parentesco entre los nodos dando lugar a términos como padre, hijo, hermano, antecesor, sucesor, ancestro, etc... Formalmente se define un árbol de tipo T como una estructura homogénea que es la concatenación de un elemento de tipo T junto con un número finito de árboles disjuntos, llamados subárboles.

Una forma particular de árbol puede ser la estructura vacía. Un árbol es un grafo simple en el cual existe un único camino entre cada par de vértices. Los árboles representan las estructuras no lineales y dinámicas de datos más importantes en computación. Dinámicas porque las estructuras de árbol pueden cambiar durante la ejecución de un programa. No lineales, puesto que a cada elemento del árbol pueden seguirle varios elementos.

Los árboles pueden ser contruidos con estructuras estáticas y dinámicas. Las estáticas son arreglos, registros y conjuntos, mientras que las dinámicas están representadas por listas. Sea $G=(V,A)$ un grafo no dirigido. G se denomina ARBOL, si es conexo y no contiene ciclos. Un árbol con raíz, es un árbol que tiene un vértice particular designado como raíz.

Se utiliza la recursión para definir un árbol porque representa la forma más apropiada y porque además es una característica inherente de los mismos. Los árboles tienen una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, se pueden utilizar para representar fórmulas matemáticas, para organizar adecuadamente la información, para construir un árbol genealógico, para el análisis de circuitos eléctricos y para numerar los capítulos y secciones de un libro

Ejemplo de árbol:

En la figura anterior G_1 corresponde a lo que llamamos mediante la definición ARBOL, en el caso de G_2 , éste no corresponde debido a que contiene un ciclo. Podemos destacar que cuando un grafo G es un Arbol, se reemplaza G , por R . En la figura mostrada G_1 es un subgrafo de G_2 , en el que G_1 contiene los vértices de G_2 y es árbol, además lo llamaremos “árbol abarcador”, por que proporciona conexión minimal para el grafo y un esqueleto minimal que une los vértices.

Ejemplo de árbol raíz:

Para apoyar el entendimiento de las definiciones entregadas agregaremos algunos teoremas.

Teorema:

Si a, b son vértices de un árbol $R(V,A)$, entonces hay un camino único que conecta estos vértices.

Teorema:

En cualquier árbol $R = (V, A)$, $|V| = |A| + 1$.

Teorema:

Para cualquier árbol $R = (V, A)$, si $|A| \geq 2$, entonces R tiene al menos dos vértices colgantes.

Teorema:

Sea G un grafo simple con v vértices, entonces se puede decir:

G es un árbol.

G es conexo y no contiene circuitos.

G es conexo y tiene $(n-1)$ lados.

G no contiene circuitos y tiene $(n-1)$ lados.

Arboles con Raíz

Sea G un grafo dirigido, se denomina “árbol dirigido” si el grafo no dirigido asociado con G es un árbol. Cuando G es un árbol dirigido, se denomina “árbol con raíz” si hay un único vértice r , la raíz.

Sea G un grafo con raíz V_0 . Supóngase que x, y, z son vértices en G y que (v_0, v_1, \dots, v_n) , es un camino en G .

$V_{(n-1)}$ es el padre de $v(n)$.

$V_0, v_1, \dots, v_{(n-1)}$ son los antepasados de $v(n)$.

$V(n)$ es el hijo de $v_{(n-1)}$.

Si x es un antepasado de y , entonces y es un descendiente de x .

Si x e y son hijos de z entonces x e y son hermanos.

Si x no tiene hijos entonces x es un vértice terminal.

Si x no es un vértice terminal, entonces x es un vértice interno.

El subgrafo de G que consiste en x y todos sus descendientes, con x como raíz, es el subarbol de G que tiene a x como raíz.

Sea $R = (V, A)$ un árbol con raíz r . Si R no tiene otros vértices, entonces la raíz misma constituye el recorrido en orden previo, simétrico y posterior de R . Si $|V| > 1$, sean $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k$ los subarboles de R según se va de izquierda a derecha.

El recorrido de orden previo de R comienza en r y después pasa por los vértices de R_1 en orden previo, a continuación por los vértices de R_2 en orden previo, y así sucesivamente hasta que se pasa por los vértices de R_k en orden previo.

El recorrido en orden simétrico de R primero, se pasa por los vértices de R_1 en orden simétrico, después por la raíz r y a continuación por los vértices de los subárboles R_2, R_3, \dots, R_k en orden simétrico.

El recorrido en orden posterior de R pasa por los vértices de los subárboles R_1, R_2, \dots, R_k en orden posterior y a continuación por la raíz.

Un árbol binario es uno con raíz en el cual cada vértice tiene un hijo a la derecha o un hijo a la izquierda, o viceversa, o bien ningún hijo. Un árbol binario completo es uno en el cual cada vértice tiene un hijo a la derecha y uno a la izquierda, o bien ningún hijo.

Teorema:

Si T es un árbol binario completo con i vértices internos, entonces T tiene $i + 1$ vértices terminales y $2i + 1$ vértices en total.

Un árbol binario de búsqueda es un árbol binario T donde se han asociado datos a los vértices. Los datos se disponen de manera que para cualquier vértice v en T , cada dato en el subárbol a la izquierda de v es menor que el dato correspondiente a v .

Árboles generadores:

Un árbol T es un árbol generador de un grafo G si T es un subgrafo de G que contiene todos los vértices de G .

A esta característica general es posible agregar ciertos teoremas de modo de detallar aún más el alcance de la definición. Es así como el Grafo que contiene a T debe ser conexo, pues de lo contrario no existiría un subgrafo que contuviera todos sus vértices.

Propiedades de los Árboles

Cambiar

Árboles

Son un tipo especial de grafo.

G es un grafo, no digrafo sin bucles. G es un arbol si es conexo y no tiene ciclos.

Arboles degenerados: Arbol con un solo vertice y sin lados.

Arbol maximal: T es un arbol maximal de un grafo G conexo, si es un arbol y contiene todos los vertices de G.

Teorema 1: Si a y b son dos vertices distintos de un arbol, entonces existe un unico camino elemental que conecta dichos vertices.

Teorema 2: T es un arbol cualquiera, entonces $|V|=|E|+1$.

Teorema 3: T es un arbol con $|V| \geq 2$, se verifica que tiene al menos dos vertices terminales.

Árboles Generadores y Generadores Minimales

I.- Arboles Generadores.-

Def.: Un árbol T, subgrafo de un grafo G que contenga todos los vértices de G se denomina Arbol Generador de G.

A esta característica general es posible agregar ciertos teoremas de modo de detallar aún más el alcance de la definición. Es así como el Grafo que contiene a T debe ser conexo, pues de lo contrario no existiría un subgrafo que contuviera todos sus vértices.

En general un grafo G tendrá varios árboles generadores, como el del ejemplo 1 el cual tiene al menos dos arboles generadores T1 y T2.

Algoritmos para hallar un árbol generador, que se base en el teorema de que el grafo G debe ser conexo, pueden ser los que se realizan a través de los métodos llamados buscar primero a lo ancho, buscar primero a lo largo y el de regreso al nivel anterior.

Recorridos en un Árbol

En este tema trataremos las diferentes formas de hacer recorridos en el árbol sintáctico de una expresión algebraica, con el fin de poder cambiar de manera algorítmica de una representación en sufijo a forma de prefijo o posfijo.

Primeramente se ven los algoritmos para construir el árbol sintáctico, para la expresión dada en sufijo, prefijo o posfijo y también se presentan algoritmos para reconocer si una expresión está sintácticamente correcta cuando esta dada en prefijo o posfijo.

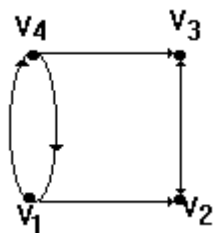
Recorridos Al visitar los nodos de un árbol existen algunas maneras útiles en las que se pueden ordenar sistemáticamente los nodos de un árbol. Los ordenamientos más importantes son llamados: preorden, post-orden y en-orden y se definen recursivamente como sigue: Si un árbol T es nulo, entonces, la lista vacía es el listado preorden, post-orden y en-orden del árbol T . Si T consiste de un sólo nodo n , entonces, n es el listado preorden, post-orden y en-orden del árbol T .

Recorridos Si T es un árbol con raíz n y subárboles T_1, T_2, \dots, T_k , entonces, El listado pre-orden de los nodos de T es la raíz n , seguida por los nodos de T_1 en pre-orden, después los nodos de T_2 en preorden, y así, hasta los nodos de T_k en pre-orden. El listado post-orden de los nodos de T es los nodos de T_1 en postorden, seguidos de los nodos de T_2 en post-orden, y así hasta los nodos de T_k en post-orden, todos ellos seguidos de n . El listado en-orden de los nodos de T es los nodos de T_1 en-orden, seguidos por n , seguidos por los nodos de T_2, \dots, T_k , cada grupo

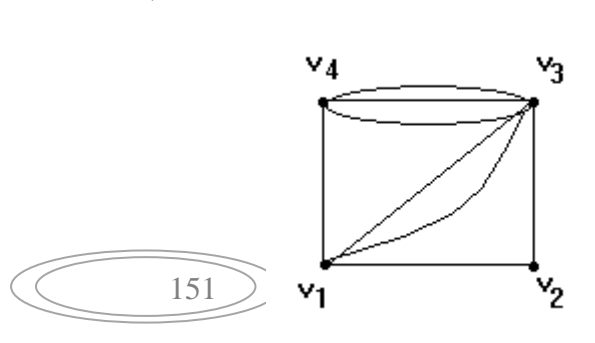
Ejercicios. Resuelva correctamente los siguientes:

1. Considere el CONJUNTO de todos los divisores del 30. $A=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $R = D_{30}$ la relación **divide a**. Represente el diagrama de Hasse.
2. Realice los diagrams de Hasse para los multiples de 4 menores de 40 y todos los divisores de 80.
3. Anote el nombre de todos los tipos de relaciones que existen en una función y escriba un ejemplo de cada una de ellas. (Por ejemplo uno a uno)
4. Represente los conjuntos V y A de los siguientes grafos.

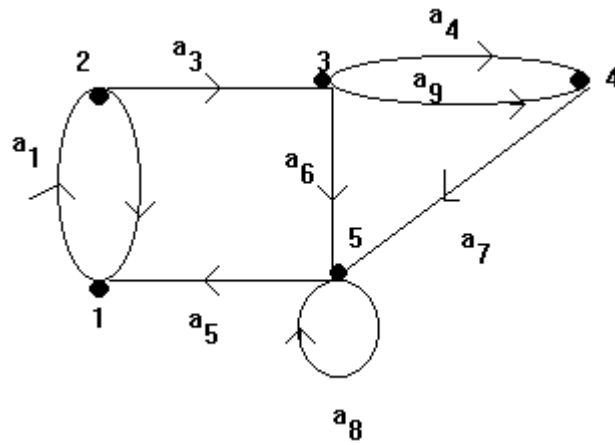
a)



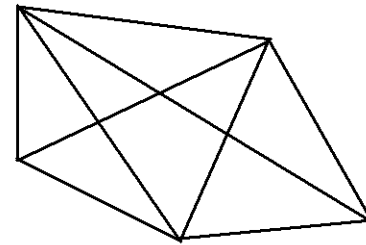
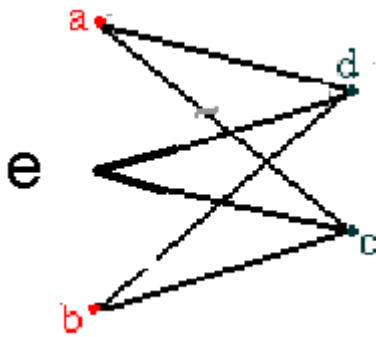
b)



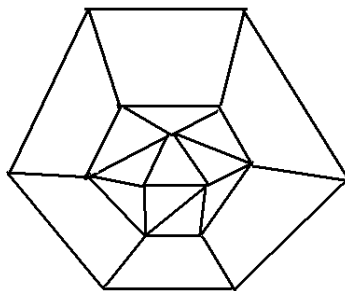
5. Determine todos los ciclos del siguiente grafo:



6. Realiza un isomorfismo de los siguientes grafos de tal forma que no se crucen las aristas.



7. Determina un ciclo y un camino Hamiltoniano



8. Diga si es posible construir un ciclo euleriano en la figura anterior.

FUENTES DE INFORMACIÓN

1. Winfried Karl GRASSMANN, Jean Paul Tremblay..

Matemáticas Discretas y Lógica

Una perspectiva desde la ciencia de la computación.

Ed. Prentice Hall, Madrid, 1988.

2. C. L. Liu.

Elementos de Matemáticas Discretas. 2da. Edición

Ed. McGrawHill 1995.

3. Johnsonbaugh Richard.

Matemáticas Discretas.

Ed. Grupo Editorial Iberoamericano 1988.

4. C. Weimer Richard.

Estadística. Cuarta edición 2002.

Ed. CECSA.

ⁱ La definición de conjunto es uno de conceptos que mejor caracterizan el pensamiento matemático, otros conceptos como punto, número, función también son buenos ejemplos de las ideas matemáticas.

Para establecer la definición de conjunto un maestro le pregunta a sus alumnos que digan lo que entienden por conjunto, el primero dice: un grupo, el segundo: una unión, el tercero: una reunión, otro más: una colección, y así sucesivamente cada uno va dando una idea similar y al final la idea de conjunto debe entenderse por sí misma.

En las matemáticas como en cualquier otra rama del conocimiento se debe de empezar con algunos conceptos para que a partir de ellos se construya lo demás. Estos conceptos primeros se llaman **Conceptos Primarios** y las estructuras matemáticas se construyen tomándolos como base. Por ejemplo en geometría se pueden tomar como conceptos primarios: punto, recta y plano.

Una estructura matemática además de conceptos primarios, tiene **axiomas**, **definiciones** y **teoremas**. Los axiomas son las propiedades que se aceptan para construir la teoría, las definiciones son nombres para los conceptos nuevos que van apareciendo y los teoremas son propiedades que deben justificadas en base a los axiomas, utilizando

propiedades que ya hayan sido comprobadas. Por supuesto que también se necesita un procedimiento para hacer demostraciones, en este caso podemos usar la lógica.

Un **conjunto** es una colección arbitraria de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman **elementos** y se acepta que hay una **relación de pertenencia** entre elementos y conjuntos. También se acepta un **conjunto universo** previamente definido donde se encuentran todos los elementos necesarios para un estudio determinado.

La relación de pertenencia **∈** cumple la condición de que dado un elemento **x** del universo y un conjunto cualquiera **A**, **x** pertenece a **A** es una proposición lógica o sea que siempre es verdadera o falsa, cuando es verdadera se representa: $x \in A$, cuando es falsa se utiliza $x \notin A$.

Representación de un conjunto:

Una forma usual de representar conjuntos es con los elementos separados por comas entre llaves. Por ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es costumbre representar a los conjuntos utilizando mayúsculas y minúsculas para los elementos, pero la representación es arbitraria por lo que se puede utilizar otra forma, por ejemplo en computación es común representar un conjunto con una o más palabras.

Si son muchos elementos se puede indicar: $DIGITOS = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $PLANETAS = \{\text{Mercurio, Venus, } \dots, \text{Plutón}\}$ o si es un conjunto infinito $NATURALES = \{0, 1, 2, \dots\}$

También se puede utilizar la relación de pertenencia escribiendo una expresión booleana; o sea, una proposición lógica. $PLANETAS = \{x | \text{es un planeta del sistema solar}\}$, la línea **|** se lee **tal que**.

El conjunto Universo se representa por **U**, por **S** o por **D**. La **S** se utiliza por la palabra **space** y es muy común utilizarla en Probabilidad, la **D** es por dominio y se puede utilizar en lógica y en computación. Pero la representación es arbitraria y se puede ajustar según el uso y los requerimientos. Lo importante es que el conjunto universo, espacio o dominio (como le queramos llamar) consta de todos los elementos con los que vamos a trabajar en un problema o situación específica.

Un conjunto muy importante es el **conjunto vacío** que se representa por Φ o por $\{ \}$.

Operaciones con conjuntos

Unión La unión de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos que estén en cualesquiera de los dos conjuntos; o sea, los que están en el primer conjunto o el segundo conjunto

$$A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección La intersección de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos comunes; o sea, los que están en el primer conjunto y el segundo conjunto

$$A \cap B = \{x \in U | x \in A [\&and?] x \in B\}$$

ii En un par ordenado (x, y) , como su nombre lo dice, importa el orden. Dos pares serán iguales si y sólo si los dos primeros elementos son iguales y los dos segundos elementos son iguales. Debemos formalizar la idea, o sea

$$(x, y) = (z, w) \text{ si y sólo si } x = z \text{ y } y = w$$

Para lograr esta condición, podemos hacerlo de varias maneras, una forma es en base a la teoría de conjuntos dar una definición.

$$\textbf{Definición } (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Propiedad Un par ordenado está ordenado; esto es,

$(x,y) = (z,w)$ si y sólo si $x=y$ y $z=w$.

Demostración.

Es obvio que si $x=z$ y $y=w$ los pares (x,y) y (z,w) son iguales por la definición.

Supongamos que $(x,y) = (z,w)$ entonces $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\}$

Podemos tener dos casos: $x=y$ o $x \neq y$

$x = y \Rightarrow \{\{x\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\} \Rightarrow \{z,w\} = \{x\} \Rightarrow z=w=x$

por lo que todos los elementos son iguales y por lo tanto se cumple $(x,y) = (z,w)$

$x \neq y \Rightarrow \{x,y\} \neq \{z\} \Rightarrow \{x,y\} = \{z,w\} \Rightarrow \{z\} = \{x\} \Rightarrow x=z$

De aquí vemos que $\{x,y\} = \{x,w\} \Rightarrow y \in \{x,w\} \Rightarrow y=w$ pues $y \neq x$

El concepto de par ordenado se puede generalizar a **tuplo**, cuando se tienen varios elementos en orden.

Definición $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

También se puede ver directamente que la definición garantiza el orden. De acuerdo a la materia que los utilice las lista ordenadas reciben diferentes nombres:

Nombre	Materia
Tuplo	Base de Datos
Ordenación	Combinatoria
Permutación	Probabilidad
Vector de dimensión n	Álgebra Lineal
Arreglo Unidimensional	Programación
Lista ordenada	Estructuras de Datos
n-ada	Cálculo